

# A dinâmica de $N$ corpos sobre superfícies: um exemplo para 2 corpos

Rodrigo Gonçalves Schaefer

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós-graduação do instituto de matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em matemática.

**Orientadora:** Stefanella Boatto

Rio de Janeiro  
30 de maio de 2014

# A dinâmica de $N$ corpos sobre superfícies: um exemplo para 2 corpos

Rodrigo Gonçalves Schaefer

Orientadora: Stefanella Boatto

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós-graduação do instituto de matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em matemática.

Aprovada por:

---

Presidente, Prof<sup>a</sup>. Stefanella Boatto - IM/UFRJ

---

César Augusto Rodrigues Castilho -DMAT/UFPE

---

Umberto Leone Hryniewicz - IM/UFRJ

---

Teresinha de Jesus Stuchi - IF/UFRJ

Rio de Janeiro

30 de maio de 2014

## CIP - Catalogação na Publicação

G635d Gonçalves Schaefer, Rodrigo  
A dinâmica de N corpos sobre superfícies: um exemplo para 2 corpos / Rodrigo Gonçalves Schaefer. -- Rio de Janeiro, 2014.  
171 f.

Orientadora: Stefanella Boatto.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Problema dos N corpos em superfícies. 2. Métrica massificada. 3. Mecânica Celeste. I. Boatto, Stefanella, orient. II. Título.

# Agradecimentos

Gostaria de começar agradecendo e dedicando este trabalho aos meus pais Luiz Antonio Schaefer e Selma Gonçalves Schaefer, e dizer que tudo que faço é com objetivo de que tenham orgulho de mim. Gostaria de agradecer minhas irmãs Juliana Schaefer Pegaitaz e Ana Carolina Gonçalves Schaefer pelo apoio e exemplo. E dedico aos meus sobrinhos Caio Schaefer Pegaitaz e Camila Schaefer Pegaitaz.

Sinto me obrigado a agradecer alguns professores que foram essenciais nessa caminhada até aqui como: Zilma Matos, Vinicius Teixeira Santos, Monica Moulin Ribeiro Merkle, Cesar Javier Niche Mazzeo, Monique Robalo Moura Carmona, Alexander Arbieto.

Gostaria de agradecer também aos meu amigos de Cabo Frio pelos jogos de Volei, campeonatos de video-game, jogos de poker e tudo mais, Gabriel Givigier, Lucas de Carvalho, Paulo Roberto Fonseca, Jônatas Ferreira, Rhenan Oliveira, Marcus Bouças.

Aos amigos de graduação Guilherme Seguro, Carla Moraes, Julio Reuther, Vinicius Porto, Jorge Mello, Charles Figueiredo.

Enfim, aos amigos que diviram minhas preocupações e alegrias e que a amizade deles já valeram o mestrado: Renan Assimos e Mariana Pillar, Sara Campos, Diego Brarros, Marcelo Leite, Jennyffer Bohorquez e Freddy Castro, Daniel Oliveira, Francis Cordova, Andres Lopez, George Bautista, José

Reyes, Leonardo Aguillar, Vernny Chávez, Adrés Ortiz, Walter Brito, Armando Cárdenas, Gladston Duarte e a todos os amigos da “salinha”.

Agradeço às amizades distantes, mas não menos essenciais de Amanda Guimarães e Carla Abreu.

Agradeço especialmente a minha orientadora, a Stefanella Boatto por aceitar a trabalhar comigo, pela solidariedade, paciência e dedicação.

Finalmente agradeço ao CNPQ e FAPERJ pelo apoio financeiro.

“Though the earth is dying his head is in the stars” (Gilmour/Samson).

## Resumo

Este trabalho se baseia no artigo “The n-body, the n-vortices and the n-charges’ dynamics on surfaces : a common view point”[6] (em preparação), estudando casos particulares e consequências nos mesmos. O trabalho pode ser dividido nas seguintes partes:

- Formulação da dinâmica de  $N$  corpos utilizando a geometria intrínseca da superfície no qual o movimento está restrito.
- Comparação, no caso da dinâmica de dois corpo no plano, entre a formulação usual e a proposta, explicitando a diferença de resultados com relação às órbitas.
- Estudo do processo de redução da dimensão do sistema nos casos do cilindro e esfera para a dinâmica de dois corpos. Introdução da noção de métrica massificada para o mesmo.
- Demonstração do Teorema de Bertrand (que versa sobre a condição para órbitas fechadas) para superfícies de revolução e consequências, e uma generalização para o vetor de Laplace-Runge-Lenz, baseados nos artigos [25] e [26] respectivamente.

Palavras chave: Dinâmica dos  $N$  corpos, superfícies de curvatura constante, métrica massificada, mecânica celeste;

## Abstract

This work is based on the paper “The n-body, the n-vortices and the n-charges’ dynamics on surfaces : a common view point” [6] (in preparation), studying particular cases and consequences of them. The work can be divided in the following parts:

- N-body dynamics’ formulations utilizing the surface’s intrinsic geometry on the movement is restricted.
- Comparison, 2-body problem on plane case, between usual and proposal formulation, evidencing the difference of the results about the orbits.
- Study of the system’s reduction dimensional process on the cylinder and sphere cases for 2-body problem. Introduction to the mass metric notion.
- Demonstration of the Bertrand’s theorem (about conditions for closed orbits) for revolution surfaces and consequences, and a generalization for Laplace-Runge-Lenz vector based respectively on the articles [25] and [26].

Key words: N-body dynamics’, constant curvature surface, mass metric, celestial mechanics;

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução à Mecânica Celeste</b>	<b>18</b>
1.1	Mecânica Clássica . . . . .	18
1.2	Mecânica Celeste . . . . .	20
1.3	Formulação Variacional . . . . .	22
1.3.1	Formulação Lagrangiana . . . . .	25
1.3.2	Transformada de Legendre . . . . .	29
1.3.3	Formulação Hamiltoniana . . . . .	30
1.4	Dinâmica das partículas testes . . . . .	34
1.5	O Potencial . . . . .	35
1.5.1	A equação do Potencial . . . . .	35
1.5.2	Forças centrais . . . . .	37
1.5.3	A Equação fundamental e a condição extra . . . . .	41
1.5.4	Teorema de Hodge, decomposição por formas em $\mathbb{R}^2$ . . .	45
1.5.5	Equação do potencial na esfera . . . . .	51
1.5.6	Condição de Gauss . . . . .	54

	9
1.6	Dinâmica de massas e cargas puntiformes . . . . . 56
<b>2</b>	<b>O problema dos dois corpos no plano imerso em <math>\mathbb{R}^3</math> . . . . . 58</b>
2.1	Formulação hamiltoniana . . . . . 59
2.2	Integrais de movimento . . . . . 60
2.2.1	Caso geral . . . . . 60
2.2.2	Caso Hamiltoniano . . . . . 61
2.2.3	Mecânica celeste . . . . . 64
2.3	Integrabilidade . . . . . 65
2.4	Redução . . . . . 67
2.5	O Problema de Kepler . . . . . 72
2.5.1	Caso Geral . . . . . 72
2.5.2	Caso a ser estudado . . . . . 75
2.6	Estudo do potencial . . . . . 77
2.6.1	O Potencial Efetivo . . . . . 77
2.6.2	Estudo qualitativo das órbitas . . . . . 79
2.7	O vetor de Laplace-Runge-Lenz . . . . . 82
2.7.1	O vetor . . . . . 83
2.7.2	Interpretação geométrica do vetor L-R-L . . . . . 84
2.7.3	As coordenadas do vetor L-R-L como integrais de movimento . . . . . 85

	10
2.7.4	Independência entre as integrais . . . . . 87
<b>3</b>	<b>O problema dos dois corpos na geometria intrínseca do plano 89</b>
3.1	Plano como espaço ambiente . . . . . 89
3.2	Estudo do potencial . . . . . 90
3.2.1	O Pontencial Efetivo . . . . . 91
3.2.2	Estudo qualitativo das órbitas . . . . . 94
3.3	O Potencial $\log(r)$ e as órbitas fechadas . . . . . 96
3.3.1	O potencial $\log(r)$ não gera órbitas elípticas . . . . . 96
3.3.2	O Potencial $\log(r)$ não gera órbitas fechadas . . . . . 98
<b>4</b>	<b>O Problema dos dois corpos no cilindro 104</b>
4.1	O cilindro . . . . . 104
4.2	O sistema . . . . . 105
4.3	O Potencial . . . . . 106
4.4	As equações . . . . . 106
4.5	Integrais de movimento . . . . . 107
4.5.1	$p_{z_1} + p_{z_2}$ como integral de movimento . . . . . 107
4.5.2	$p_{\theta_1} + p_{\theta_2}$ como integral de movimento . . . . . 108
4.6	Redução . . . . . 109
<b>5</b>	<b>O Problema dos dois corpos na esfera 111</b>

	11
5.1 A esfera . . . . .	111
5.2 O sistema . . . . .	112
5.3 O potencial . . . . .	113
5.4 As equações . . . . .	113
5.5 Integrais de movimento . . . . .	114
5.5.1 $p_{\phi_1} + p_{\phi_2}$ como integral de movimento. . . . .	114
5.6 Redução . . . . .	115
<b>6 Uma métrica massificada e o processo de redução</b>	<b>117</b>
6.1 Plano . . . . .	117
6.1.1 As coordenadas . . . . .	117
6.1.2 Redução . . . . .	119
6.2 Cilindro . . . . .	121
6.2.1 As coordenadas . . . . .	121
6.2.2 Redução . . . . .	122
6.3 Esfera . . . . .	123
6.3.1 As coordenadas . . . . .	124
6.3.2 Redução . . . . .	125
<b>7 Uma generalização do Teorema de Bertrand</b>	<b>127</b>
7.1 A Superfície . . . . .	127
7.2 Ajustes de Coordenadas . . . . .	129

7.3	O Sistema . . . . .	130
7.4	Preliminares . . . . .	132
7.5	O Teorema . . . . .	148
<b>8</b>	<b>Integrais Adicionais</b>	<b>155</b>
8.1	O vetor de Laplace-Runge-Lenz generalizado . . . . .	155
8.1.1	A Superfície . . . . .	155
8.2	Integrais quadráticas . . . . .	156
8.3	Demonstração . . . . .	157
8.4	Encontrando a expressão de $I$ . . . . .	159
8.4.1	Determinando $I$ . . . . .	163
8.5	Integrais Escondidas . . . . .	164
8.6	Independência entre as integrais . . . . .	165
8.6.1	Considerando $I_1, I_2, H$ e $p_\phi$ . . . . .	166

## Introdução

Este trabalho se ambienta num caso particular, o de dois corpos, do tratado pelo artigo “The n-body, the n-vortices and the n-charges’ dynamics on surfaces : a common view point” [6] em preparação .

Este artigo tem o intuito, o que fizemos aqui para dois corpos, de estudar quais as são equações básicas do problemas dos n-corpos em superfícies para a geometrização da formulação. Ou seja, dada uma métrica  $\mathbf{g}$ , que é intrínseca à superfície, uma distribuição dos n-corpos de massa sobre a superfícies e as velocidades iniciais, qual é a dinâmica?

O ponto de partida da nossa formulação será considerar as equações fundamentais que nos permitem descrever a dinâmica de uma partícula teste sobre uma variedade  $\mathbb{M}$  com uma métrica  $\mathbf{g}$  , o par  $(\mathbb{M}, \mathbf{g})$ , para uma distribuição de matéria dada,  $S$ . Vamos considerar um campo de aceleração *central*  $\mathfrak{D}$ , ou seja um campo que verifica

$$\text{div}(\mathbf{a}) = cS \quad \text{e} \quad \text{rot}(\mathbf{a}) = 0.$$

Reescrevendo  $\mathbf{a}$  como

$$\mathbf{a} = -\text{grad}(\Phi_g),$$

onde  $\Phi_g$  é chamado de potencial gravitacional, a equação do *divergente* se torna

$$\Delta_{\mathbf{g}}\Phi_g = -cS, \tag{1}$$

que será nossa *equação fundamental*. Como veremos, o potencial  $\Phi_g(\mathbf{r}, t)$  vai ser interpretando como o potencial de uma partícula teste localizada em  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$  e transportada força gerada pela distribuilção de matéria  $S(\mathbf{r}, t)$ .

Isso vai ser descrito com o sistema hamiltoniano de equações:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}},$$

onde  $H$  é o hamiltoniano

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}\|_{\mathbf{g}}^2 + \Phi_g(\mathbf{r}, t). \\ &= \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}\|_{\mathbf{g}}^2 + \sum_{i=1}^N m_i G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i(t)), \end{aligned}$$

onde  $G$  é a solução fundamental (função de Green) da equação de Poisson (1).

Ressaltamos que dada a métrica  $\mathbf{g}$ , a parte cinética está definida automaticamente por

$$\sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|_{\mathbf{g}}^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \mathbf{p}_i^T \mathbf{g}^{-1} \mathbf{p}_i.$$

Isso é análogo à formulação da eletrostática [23], onde o divergente do campo elétrico

$$\text{div}(\mathbf{a}) = -cS,$$

o potencial eletrostático é a solução de

$$\Delta \Phi_e = cS.$$

A segunda etapa do trabalho será a formulação da dinâmica dos corpos que são as fontes do campo gravitacional. Mais especificadamente, considerando  $S = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$ , i.e, o campo gravitacional é gerado para N-corpos *puntiformes* de massa  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , com posições, respectivamente,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ . Nesse contexto a nossa hipótese de trabalho será que cada corpo se comporta como partícula teste no campo gerado pelos outros N-1 corpos. Isso leva que a dinâmica é descrita pelas equações

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i},$$

onde  $i \in 1, \dots, N$  e  $H$  é dado por

$$H(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} + V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N),$$

onde  $V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \sum_{i \neq j} \sum_{i=1}^N m_i m_j G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ .

Ressaltamos que nesse trabalho, como em [6], trabalhamos na geometria intrínseca da supercície. Diferentemente do que foi feito antes em Diacu, Pérez-Chavela e Santoprete [10], onde as superfícies são vistas como imersas em  $\mathbb{R}^3$  e o potencial considerado é o de  $\mathbb{R}^3$  restrito à superfície. Em particular em [10], no caso planar o potencial utilizado foi proporcional a  $\frac{1}{r}$  e a dinâmica dos dois corpos verificava as três leis de Kepler [2]:

1. O vetor radial de cada planeta com respeito ao Sol como origem, “varre” uma área igual em tempos iguais.
2. A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol em um dos focos.
3. Os quadrados dos períodos dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das suas respectivas órbitas.

Porém, na formulação que introduzimos, onde consideramos a dinâmica geométrica intrínseca do plano, o potencial correspondente é proporcional a  $\log(r)$ . No caso dos dois corpos isso implica que as leis Kepler não são verificadas, mas tem outras propriedades como o fato que todas as órbitas são limitadas (o que não acontece na formulação anterior). Além disso a única órbita fechada é a circular.

Ademais, no estudo da integrabilidade do problema dos dois corpos sobre uma superfície dada (no nosso caso: plano, cilindro e esfera), foi necessário

introduzir a noção de métrica massificada pela variedade produto  $(\mathbb{M})^N$ ,

$$ds_m^2 = \sum_{i=1}^N m_i ds_i^2,$$

onde  $ds_i$  é a métrica da variedade  $\mathbb{M}$  onde se desloca a  $i$ -ésima partícula. Com essa nova abordagem não temos a dificuldade de como interpretar o centro de massa do sistema, o que ocorria anteriormente, pois não estava bem definido, ou seja, não estava no espaço onde acontecia a dinâmica (sobre a superfície). E ainda ganhamos, como consequência, uma simplificação na notação das equações, dando ao Hamiltoniano do sistema uma forma “fixa” durante o processo de redução:

$$H = \frac{\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{G}_1}^2}{2} + V(r),$$

onde  $r = (\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ , ou seja, a configuração do sistema é representada por um único ponto em um espaço de dimensão maior.

E, para finalizar abordamos a existência de integrais extras do tipo vetor de Laplace-Runge-Lenz em espaços de superfície com curvatura. Com esse objetivo vamos generalizar o estudo feito pelo Manuele Santoprete [25], com potencial  $\frac{1}{r}$ , no nosso caso da geometria intrínseca, ou seja o potencial  $\log(r)$ .

O primeiro passo é a generalização do teorema de Bertrand para superfícies de revolução com curvatura constante [26]. Nesse artigo foram dadas as condições para obtermos órbitas fechadas no problema de Kepler. Mostramos que também nesse caso haverá diferenças entre a formulação tradicional e a proposta. Teremos que existe pelo menos uma órbita limitada que não é fechada.

O segundo passo foi buscar a existência de uma integral adicional do tipo quadrática nos momentos, que é uma generalização do generalização do vetor

de Laplace-Runge-Lenz. Para isso apresentamos o resultado do Manuele Santoprete em [25] onde ele mostra a existência utilizando a geometria extrínseca da superfície, porém verificamos que não ocorre na geometria instrínseca ao utilizar a técnica apresentada por ele.

# Capítulo 1

## Introdução à Mecânica Celeste

### 1.1 Mecânica Clássica

A Mecânica Clássica tem como fundamento o que é conhecido como as *leis de Newton*, a saber, como segue em Moulton [22],

- 1<sup>a</sup> lei Todo corpo continua em estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que sofra a ação de uma força externa.
- 2<sup>a</sup> lei A taxa de variação do movimento é proporcional à força empregada e se dá na direção segundo o segmento em que a força age. Também comumente conhecida, de maneira simplificada, como  $\vec{F} = m\vec{a}$ , onde  $\vec{F}$  é a força e  $\vec{a}$  a aceleração.
- 3<sup>a</sup> lei As ações mútuas entre os corpos são sempre iguais em intensidade e direções opostas. Mais famosa como “Ação-Reação”.

É interessante observar que as duas primeiras leis já eram conhecidas por Galileo Galilei (1564-1642) e Christiaan Huygens (1629-1695). Mas foi Isaac

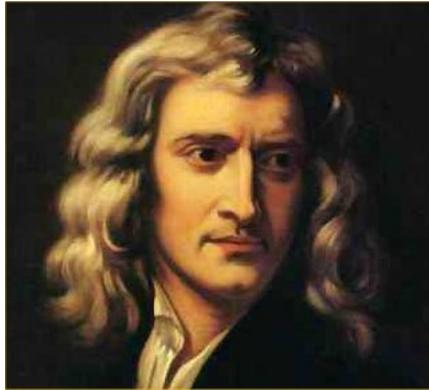


Figura 1.1: Isaac Newton

Newton(1642-1727), em *Principia* (1686), quem as publicou juntas pela primeira vez. [22]

Apesar de serem estabelecidas como *axiomas* por Newton, as leis foram inferidas de experimentos. Newton realizou vários experimentos no sentido de verificá-las. Tanto no estudo do ricochete de corpos elásticos em colisão, quanto na aceleração de imãs flutuando em bacias de água, dentre outras. A grande dificuldade, devido às limitações tecnológicas da época, era eliminar as forças externas em ação sobre o sistema observado nos experimentos.

Analisando um pouco mais profundamente cada uma das leis, podemos fazer observações que num primeiro momento podem passar despercebidas. Por exemplo:

- A partir da primeira lei, pode se definir tempo e linha reta.
- A 2ª lei define uma relação entre força e aceleração (i.e. a dinâmica). De forma que o coeficiente de proporcionalidade é a “massa”. Note que um corpo de massa zero não pode ser acelerado.
- As duas primeiras leis são suficientes para o estudo do movimento de um

corpo sob ação de um número conhecido de forças. Já a 3ª lei é necessária para o estudo de um sistema com mais de um corpo que agem mutuamente.

## 1.2 Mecânica Celeste

A lei de corpos caindo sob aceleração constante foi investigada por Galileu e Simon Stevin (1548 - 1620) e para vários casos de aceleração variável por Newton [22]. Ainda eram os primórdios do estudo da ação da *gravidade*. No início do século XVII, Johannes Kepler (1571-1630) enunciou as três leis do movimento planetário: [2][22]

1. O vetor radial de cada planeta com respeito ao Sol como origem, “varre” uma área igual em tempos iguais.
2. A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol em um dos focos.
3. Os quadrados dos períodos dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das suas respectivas órbitas.

É comum na literatura afirmar que a partir de considerações das *leis de Kepler*, a gravidade na superfície da Terra, movimento lunar em torno da Terra, foi possível a Newton enunciar a *Lei da gravitação universal* [22]

*Duas partículas de matéria no universo se atraem mutuamente com uma força que age na direção da reta que passa pelas duas partículas e de intensidade que varia diretamente com o produto de suas massas e inversamente com o quadrado da distância entre elas.*

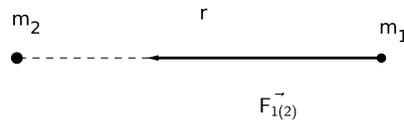


Figura 1.2: Força de atração

$$F_{1(2)} = \frac{km_1m_2}{r^2},$$

onde  $F_{1(2)}$  é a força sob o corpo de massa  $m_1$  devido a presença do corpo de massa  $m_2$ ,  $r$  a distância entre os corpos e  $k$  uma constante de proporcionalidade.



Figura 1.3: Robert Hooke

Porém, há indícios de que não foi bem assim que aconteceu. De acordo com Arnold [3], muito se deve a Robert Hooke (1635-1703). Hooke que teria encontrado a partir de experimentos a proporcionalidade  $F \sim \frac{1}{r^2}$ . Porém, faltava-lhe o ferramental matemático para comprová-la. Percebendo isso, propôs o problema para Newton, que apesar de ter sido um desafeto no passado ( muito por discordarem sobre a natureza da luz), no momento viviam uma trégua,

podendo se dizer que quase colaborativo (após uma carta de reaproximação enviada por Hooke, Newton sugeriu-lhe fazer um experimento para comprovar a teoria de Copernicus de que a Terra rodava sobre seu próprio eixo). Newton, tendo recebido o problema de Hooke, com seus resultados experimentais e explicações ficou em silêncio. Que foi quebrado com o “Principia”, onde além de fundamentar a mecânica, ele enunciava a *Lei da gravitação universal*, porém, sem citar Hooke. Graças a Edmond Halley (1656-1742), um amigo comum entre os dois, que insitiu com Newton que citasse Hooke, numa nova versão, o nome de Hooke aparece. Porém, sem o devido crédito.

Tendo em mãos as *três leis de Newton* e a *lei de gravitação universal* foi possível explicar completamente fenômenos astronômicos que até o momento eram “misteriosos” e por isso Newton se tornou um dos cientistas mais influentes de sua época. Com o advento da *Teoria da Relatividade*, se tornou mais evidente as limitações da mecânica no ponto de vista clássico ( newtoniana). Fazendo-se necessário uma mudança no tratamento, a base dessa formulação que era a força passa ser a energia.

### 1.3 Formulação Variacional

Como pode ser visto em Yourgrau [20], em 1744 quando o matemático francês Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) enunciou a 1ª versão do “princípio de mínima ação”, princípios variacionais já haviam sido discutidos pelos gregos e o “Princípio de Fermat” da ótica já havia sido bem formalizado pelo próprio Fermat (ver [20]). Basicamente, nesse princípio ele afirmava que a natureza agia pelos meios mais simples. Mais especificamente, quando ocorre

uma alteração na natureza, a quantidade de “ação” para essa mudança é a menor possível. Porém a definição de “ação” para ele não era clara.



Figura 1.4: Leonhard Euler

No mesmo ano, foi Leonhard Euler (1707-1793) quem publicou o princípio como um teorema pela primeira vez. Nesse teorema ele estabelecia que o caminho que uma partícula percorre de um ponto a outro no espaço é exatamente aquele que minimiza a integral  $\int v ds$  onde  $v$  é a velocidade da partícula. Apesar da diferença de filosofia entre os dois, onde para Maupertius o princípio tinha um caráter quase (ou completamente) metafísico, Euler chamou seu teorema de “Princípio de Maupertuis”.

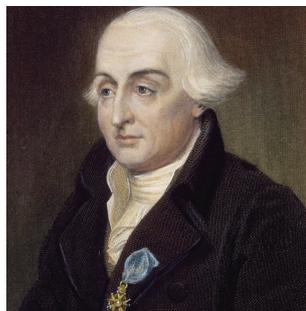


Figura 1.5: Luigi Lagrange

Porém, ainda não estava completamente formulado o princípio. Luigi Lagrange (1736-1813) em 1788 que o desenvolveu, considerando uma quantidade

finita qualquer de partículas em interação, além de forças obtidas através de um potencial. Chegando a estabelecer a equivalência do “Princípio de mínima ação” com as três leis de Newton.

Mas foi apenas com William Rowan Hamilton (1805-1865), com a formulação da Mecânica Lagrangiana e da Mecânica Hamiltoniana que se foi percebida a grande utilidade e importância desse princípio que pode ser enunciado como em Goldstein [15]

*O movimento de um sistema a partir do tempo  $t_1$  ao tempo  $t_2$  é tal que a integral de linha*

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (K - U) dt$$

*onde  $U$  é a energia potencial,  $K$  é energia cinética, tem um valor estacionário para o caminho do movimento*

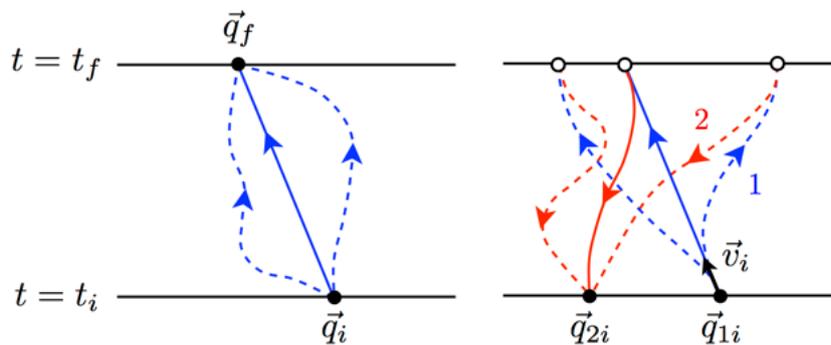


Figura 1.6: Princípio de mínima ação

As formulações da Mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana serão brevemente desenvolvidas nas próximas seções.

### 1.3.1 Formulação Lagrangiana

Seguindo Lopes [19], vamos estabelecer a formulação Lagrangiana, seus principais resultados e algumas observações. Primeiro vamos definir o *Lagrangiano* e a *ação* associada a ele.

Vamos considerar o conjunto dos possíveis caminhos definido por  $\mathfrak{F} = \{\mathbf{q}; \mathbf{q} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{q} \text{ de classe } C^1 \text{ e } \mathbf{q}(a) = a_1 \text{ e } \mathbf{q}(b) = b_1\}$ .

#### Definição 1.3.1.

1. Uma função  $L : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$  é dito um **Lagrangiano**

2. O funcional

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &: \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{q} &\rightarrow \int_a^b L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt \end{aligned}$$

é a **ação** de  $L$  sobre os caminhos de  $\mathfrak{F}$

O princípio básico por trás da *Mecânica Lagrangiana* é, ao estudarmos um sistema mecânico, associarmos um lagrangiano a ele, de forma que o caminho que minimiza o funcional  $\mathfrak{L}$  descreva o comportamento do sistema em relação ao tempo. Isso nem sempre ocorre, como pode-se ver na Mecânica Quântica (ver [19]), porém não entraremos em tais detalhes.

Portanto, os pontos críticos de  $\mathfrak{L}$ , isto é,  $x_0 \in \mathfrak{F}$  tal  $D\mathfrak{L}|_{x_0} = 0$  terão grande importância na teoria. Como  $\mathfrak{L}$  é definido a partir de  $L$ , para simplificação da linguagem, diremos:

**Definição 1.3.2.**  $\mathbf{q} \in \mathfrak{F}$  é **crítico de  $L$**  se é crítico de  $\mathfrak{L}$ .

Então agora, buscar o comportamento de um sistema com um lagrangiano  $L$  é equivalente a buscar os caminhos críticos desse lagrangiano (no sentido da definição acima).

Para identificarmos esses caminhos críticos usaremos o teorema a seguir:

**Teorema 1.** *Seja*

$$\mathfrak{L}(\mathbf{x}) = \int_a^b L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt,$$

$x \in \mathfrak{X}$ . Se  $\mathbf{q}$  é um caminho crítico para  $L$ , então satisfaz a equação

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}') - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}') = 0.$$

A demonstração do teorema acima pode ser vista em [14].

**Definição 1.3.3.** *A equação*

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$$

é dita a **equação de Euler-Lagrange** associada ao lagrangiano  $L$ .

Na direção do que estamos estudando, isto é, sistemas agindo sob atração gravitacional, vamos definir o seguinte tipo de lagrangiano:

**Definição 1.3.4.** *Um lagrangiano  $L$  é dito um **lagrangiano natural** se existe uma função  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m \|\dot{\mathbf{q}}\|^2}{2} - U(\mathbf{q})$$

**Observação 1.** Note que o lagrangiano natural está associado a um sistema mecânico, onde a energia cinética é  $K = \frac{m \|\dot{\mathbf{q}}\|^2}{2}$  e energia potencial  $U(\mathbf{q})$ .

Portanto, podemos escrever que

$$L = K - U$$

**Observação 2.** A parte cinética do lagrangiano pode ser escrita como:

$$K = \left(\frac{m}{2}\right) \dot{\mathbf{q}}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}.$$

A matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , como veremos futuramente, é a matriz que representa a **métrica g** no espaço, nesse caso em particular, o espaço euclidiano. Em coordenadas polares  $q_1 = r \cos \phi$  e  $q_2 = r \sin \phi$ , a métrica é

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$$

e teremos a matriz

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

representando a métrica. A energia cinética neste caso é dada por

$$K = \left(\frac{m}{2}\right) \dot{\mathbf{q}}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}.$$

Então, segue o teorema que é mais interessante para nosso estudo

**Teorema 2. Princípio de Mínima Ação.**

Seja  $L$  um lagrangiano natural e  $\mathcal{L}$  sua ação em  $\mathfrak{F}$ .  $\mathbf{q}$  é crítico em  $L$  se, e somente se,  $\mathbf{q}$  satisfaz a lei de Newton para o sistema associado a  $L$ .

*Demonstração.* Seja um sistema mecânico de energia potencial  $U(\mathbf{q})$ , temos a lei de Newton  $m\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla U(\mathbf{q})$ , ou seja,

$$-(m\ddot{\mathbf{q}} + \nabla U(\mathbf{q})) = 0. \quad (1.1)$$

Além disso, o lagrangiano natural é dado por  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m\|\dot{\mathbf{q}}\|^2}{2} - U(\mathbf{q})$ . Vamos provar que a lei de Newton é equivalente a equação de Euler-Lagrange de  $L$ .

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{m \|\dot{\mathbf{q}}\|^2}{2} - U(\mathbf{q}) \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{m \|\dot{\mathbf{q}}\|^2}{2} - U(\mathbf{q}) \right) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} m \dot{q}_i \\ &= -\left( \frac{\partial U}{\partial q_i} + m \ddot{q}_i \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \iff \nabla U(\mathbf{q}) + m \ddot{\mathbf{q}} = 0$$

□

Agora que já mostramos que podemos ver o problema de corpos que se interagem através da força gravitacional do ponto de vista da Mecânica Lagrangiana, vamos mostrar uma propriedade dessa abordagem de grande utilidade. Essa propriedade é a *invâriância do lagrangiano sob mudanças de coordenadas*. Isso, como veremos nas seções futuras, não acontecerá na *Mecânica Hamiltoniana*. Lá, as mudanças de coordenadas devem ser feitas com muito mais cuidado.

**Teorema 3.** *Seja  $G(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}$  uma mudança de variáveis. A equação de Euler-Lagrange  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0$  associado ao lagrangiano  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  e  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Q}}}$  associado a  $L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$  determinam a mesma equação diferencial, a menos de uma mudança de coordenadas.*

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{Q} = G(\mathbf{q})$  uma mudança de coordenada. Temos que  $\dot{\mathbf{Q}} =$

$J(G)\dot{\mathbf{q}}$ , onde  $J(G)$  matriz jacobiana de  $G$ . Feito isso temos,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \quad (1.3)$$

Observe que  $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0$  por isso não aparece na última equação. Subtraindo as equações (1.2) e (1.3), temos

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \right) \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (1.4)$$

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} &= J(G) & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{q}} &= H(G)\dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= J(G) & \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= H(G)\dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

onde  $H(G)$  é a matriz Hessiana de  $G$ . Substituindo na equação 1.4),

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \right) J(G).$$

Sendo  $J$  uma matriz invertível,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} = 0.$$

□

### 1.3.2 Transformada de Legendre

Seguindo Arnold [2], vamos associar a mecânica lagrangiana e a mecânica hamiltoniana através da *transformada de legendre*. Mas antes, fazemos a seguinte definição:

**Definição 1.3.5.** Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é dita **convexa** se sua Hessiana é definida positiva.

Então definimos,

**Definição 1.3.6.** Seja  $f$  uma função convexa, a **transformada de Legendre** de  $f$  é função, dado  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$g(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{x} \in \text{Dom}(f)} \{ \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x}) \}.$$

Seja  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  um lagrangiano, e assumimos que é convexo na segunda coordenada. Temos o seguinte teorema

**Teorema 4.** O sistema de equações de Lagrange é equivalente ao sistema de  $2n$ -equações de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.5)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad (1.6)$$

onde  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  é a transformada de Legendre em relação a  $\dot{\mathbf{q}}$ .

**Observação** A função  $H$  acima é dito o *hamiltoniano* e as equações (1.5) e (1.6) as *equações de Hamilton*.

### 1.3.3 Formulação Hamiltoniana

Pelo teorema anterior um sistema dinâmico associado a um lagrangiano pode ser descrito por uma função  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  com as equações:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.7)$$

Se denotarmos por

$$\mathbf{X} = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

temos que as equações (1.7) podem ser escritos de forma reduzida

$$\dot{\mathbf{X}} = J\nabla H,$$

onde  $\nabla_{\mathbf{X}}H = \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$  e  $I$  a matriz identidade  $n \times n$ .

**Teorema 5.** *Seja um sistema mecânico, de forma que o langrangiano associado a ele é dado por  $L = K - U$ , onde  $K$  é a energia cinética e  $U$  a energia potencial, então o hamiltoniano  $H$  é dado por*

$$H = K + U. \text{ (Energia total)}$$

**Corolário 1.** *Dada uma variedade de métrica  $\mathbf{g}$ , a energia cinética de um sistema mecânico (isto é, que obedece as leis de Newton) de  $N$  partículas de massa  $m_1, m_2, \dots, m_N$  é*

$$K = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2m_j} \|\mathbf{p}_j\|_{\mathbf{g}}^2,$$

onde definimos  $\|\mathbf{p}_j\|_{\mathbf{g}}^2 := \mathbf{p}_j \mathbf{g}^{-1} \mathbf{p}_j^T$

*Demonstração.* Temos que

$$L = K(\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}).$$

Definimos o momento como

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = m \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{g},$$

Logo,  $\dot{\mathbf{q}}^T = \frac{1}{m} \mathbf{p} \mathbf{g}^{-1}$  e  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{m} (\mathbf{g}^{-1})^T \mathbf{p}^T$ . Então,

$$K = \frac{m \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{g} \dot{\mathbf{q}}}{2} = \frac{m \mathbf{p} \mathbf{g}^{-1}}{2} \mathbf{g} \frac{(\mathbf{g}^{-1})^T \mathbf{p}^T}{m} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{g}^{-1} \mathbf{p}}{2m}.$$

Observemos que o lagrangiano e o hamiltoniano agem sobre espaços diferentes. Enquanto o lagrangiano age sobre  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , o espaço que sofre a ação de  $H$  é  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Essa mudança é importante, principalmente quando estamos estudando uma dinâmica sobre uma variedade que não seja o espaço euclidiano. Denotando por  $M$  uma variedade diferenciável, enquanto  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in TM$ , *fibrado tangente*, temos que  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*M$ , *fibrado cotangente* [2]. Ou seja, a troca de visão da mecânica lagrangiana para a mecânica hamiltoniana, é uma forma de mudar o espaço que estamos trabalhando, o fibrado tangente pelo fibrado cotangente.

Uma das vantagens de se trabalhar no fibrado cotangente é que ele possui uma estrutura simplética natural. Isto é,  $\Omega = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$  é uma 2-forma diferencial não-degenerada<sup>1</sup> e fechada<sup>2</sup>. O par  $(T^*M, \Omega)$  é definido ser uma variedade simplética.

Vamos explorar algumas propriedades da formulação hamiltoniana.

**Definição 1.3.7.** *O espaço  $2n$ -dimensional com coordenadas  $q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n$  é chamado de **espaço de fase**.*

**Observação:** Poderíamos escrever simplesmente que o  $T^*M$  é o espaço de fase.

**Definição 1.3.8.** *O **fluxo de fase** é o grupo a 1-parâmetro de transformações do espaço de fase*

$$g^t : (\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) \rightarrow (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)),$$

---

<sup>1</sup> $\Omega(u, v) = 0 \forall u \iff v = 0$

<sup>2</sup> $d\Omega = 0$

onde  $\mathbf{p}(t)$  e  $\mathbf{q}(t)$  satisfazem as equações (1.7).

Enunciamos o seguinte teorema devido a Liouville

**Teorema 6.** *O fluxo de fase preserva volume, isto é, dada uma região  $D$  no plano de fase, temos que*

$$\text{vol}(g^t D) = \text{vol}(D).$$

O teorema acima segue da equação (1.7). De fato,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \dot{\mathbf{X}} &= \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{p}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{X} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

E como consequência temos o *teorema de recorrência de Poincaré*, enunciado em [2] da seguinte forma:

**Teorema 7.** *Seja  $g$  um mapa contínuo bijetivo que preserva volume, de forma que  $gD = D$ , onde  $D$  é uma região limitada do espaço euclidiano. Então, dado  $x \in D$  e uma vizinhança  $U$  de  $x$ , para algum  $n > 0$ ,  $g^n x \in U$ .*

As demonstrações dos dois teoremas acima podem ser vistas em [2].

A partir de agora vamos comentar sobre as coordenadas da mecânica hamiltoniana, e como devem ser manipuladas para simplificarmos as equações.

**Definição 1.3.9.** *Uma coordenada  $q_i$  é dita uma coordenada cíclica se  $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ , ou seja,  $H$  não depende de  $q_i$ .*

Das equações (1.7) temos que  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ . Logo se  $q_i$  é uma coordenada cíclica,  $\dot{p}_i = 0$ , isto é,  $p_i$  é constante. Portanto, dado um valor para  $p_i$  teremos que  $H$  dependerá de  $2n - 2$  coordenadas, e também reduzimos para essa quantidade de equações no sistema (1.7).

Então, uma forma de tentar resolver um sistema Hamiltoniano é buscar coordenadas cíclicas em uma quantidade suficiente que o transforme em um sistema simplificado que seja possível resolver. O ideal seria encontrar  $n - 1$  coordenadas cíclicas, mas nem sempre será possível ou fácil e evidenciar tais coordenadas. E para encontrarmos coordenadas cíclicas será necessária fazer mudanças de coordenadas. Porém, devemos ter cuidado pois queremos manter a estrutura hamiltoniana.

Mudar de coordenadas de forma a manter a estrutura das equações (estrutura hamiltoniana) é encontrar  $\zeta = \phi(\mathbf{X})$  uma mudança de coordenadas tal que existe  $\tilde{H}(\zeta)$  com

$$\dot{\zeta} = J\nabla\tilde{H}.$$

Se  $\phi$  satisfaz isso é dita uma *transformação simplética*. Denotando  $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ ,  $\phi$  é uma transformação simplética se, e somente se  $d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = d\eta \wedge d\xi$  [7].

Para mais informações deixamos como referência [2],[7],[15] e [16].

## 1.4 Dinâmica das partículas testes

Na “Mecânica dos Fluidos” uma *partícula teste* é um pequeno volume de fluido que é passivamente transportada pelo fluxo cuja a dinâmica é induzida

para vórtices. Em particular, nesse contexto um fluido é dito incompressível se o campo de velocidade  $u$  satisfaz  $\text{div}(u) = 0$  [9].

Quando estudamos a ação de um campo sobre uma partícula, seja de massa ou de carga, queremos utilizar o mesmo princípio da Mecânica dos Fluidos, ou seja, ver como um campo “transporta” essa partícula (exatamente o que acontece com a partícula teste num fluido). Porém, aqui há uma diferença fundamental. Para haver dinâmica, o corpo que sofre a ação do campo deve interagir com os corpos que o geram. Portanto, uma escolha de partícula teste como sendo uma partícula com  $m$  nula (ou  $q$  nula no caso elétrico) em princípio não poderia ser acelerado pela força gerada pelas massas (ou cargas) que geram esse campo (força por unidade de massa).

Aqui consideramos a partícula teste como um corpo de massa unitária (ou carga unitária) e enfatizamos o fato de que o campo considerado é um campo de acelerações, ou seja, força por unidade de massa  $\left(\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\right)$ .

## 1.5 O Potencial

### 1.5.1 A equação do Potencial

O *Teorema de Decomposição de Helmholtz-Hodge*[8] [4] nos diz como um campo vetorial pode ser decomposto, segue o teorema,

**Teorema 8.** *Um campo  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  suave pode ser decomposto da seguinte forma*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,$$

onde

$$\nabla \cdot \mathbf{a}_1 = cS \quad \nabla \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{a}_3 = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{a}_1 = 0 \quad \nabla \times \mathbf{a}_2 = w \quad \nabla \times \mathbf{a}_3 = 0$$

**Observação:**  $\mathbf{a}_1$  é dito o campo *irrotacional*,  $\mathbf{a}_2$  o campo *solenoidal* e  $\mathbf{a}_3$  o campo *laplaciano*.

Em  $\mathbb{R}^3$ , o fato de que  $\nabla \times \mathbf{a}_1 = 0$ , nos permite introduzir  $\Phi$  tal que  $\mathbf{a}_1 = \nabla\Phi$ , onde  $\Phi$  é uma função diferenciável. Já de  $\nabla \cdot \mathbf{a}_2 = 0$ , nos permite introduzir um campo  $\vec{\Psi}$  tal que  $\mathbf{a}_2 = \nabla \times \vec{\Psi}$ .

Portanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot \nabla\Phi = \Delta\Phi = cS \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \vec{\Psi}) = \Delta\vec{\Psi} = -w \quad (1.9)$$

Em  $\mathbb{R}^2$ , para  $\mathbf{a}_1$  temos análogo para  $\mathbb{R}^3$ . Para  $\mathbf{a}_2$ , introduzimos uma função  $\Psi$ , de forma que  $\mathbf{a}_2 = J\nabla\Psi$ , onde  $J$  é a matriz simplética para  $n = 2$ . Temos equações análogas às equações (1.8) e (1.9) para o divergente e o rotacional do campo  $\mathbf{a}$ , ou seja

$$\Delta\Phi = cS$$

$$\Delta\Psi = -w.$$

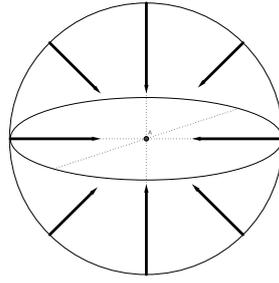


Figura 1.7: Campo Gravitacional

### 1.5.2 Forças centrais

Vamos definir um campo forças centrais como um campo de aceleração irrotacional  $\mathbf{a}$  de divergência não nula, i.e., que satisfaz

$$\nabla \times \mathbf{a} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{a} = cS \neq 0.$$

Pelo Teorema de Decomposição de Helmholtz-Hodge acima, esse campo  $\mathbf{a}$  pode ser decomposto como

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3.$$

Note que pelo fato de que  $\nabla \times \mathbf{a}_3 = 0$ , existe  $\Upsilon$  uma função tal que  $\mathbf{a}_3 = \nabla \Upsilon$ . Como  $\nabla \cdot \mathbf{a}_3 = 0$ ,  $\nabla \cdot \nabla \Upsilon = \Delta \Upsilon = 0$ , ou seja,  $\Upsilon$  é uma aplicação harmônica. Portanto podemos escrever,

$$\mathbf{a} = \nabla (\Phi + \Upsilon).$$

Definimos a notação  $\varphi = -(\Phi + \Upsilon)$ , então a equação acima fica

$$\mathbf{a} = -\nabla \varphi.$$

**Definição 1.5.1.** A função  $\varphi$  é dita o **potencial** do campo  $\mathbf{a}$ .

Como  $\nabla \cdot \mathbf{a} = cS$  temos,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (-\nabla\varphi) &= cS \\ \Rightarrow -\Delta\varphi &= cS\end{aligned}\tag{1.10}$$

A equação acima é uma *equação de Poisson* [13] e é o que vamos chamar de **equação do potencial**.

**Observação:** No caso dos vórtices consideramos um campo de velocidade  $\mathbf{u}$  tal que o  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  e  $\nabla \times \mathbf{u} = w \neq 0$ , onde  $w$  é dito ser o campo de vorticidade que vamos assumir como dado. Nesse caso teremos que resolver a equação  $-\Delta\Psi = w$ , onde  $\Psi$  é dita ser chamada função de corrente (*Stream function*). Note que as equações de  $\Psi$  e  $\varphi$  são semelhantes, e usaremos esse fato para utilizarmos o resultado de [5] para o caso das superfícies.

Portanto o *potencial* de um campo irrotacional deve satisfazer a equação (1.10). Note que a solução dessa equação não é única, pois  $\Phi$  adicionado de qualquer função harmônica também satisfaz a equação. Logo, devemos impor condições extras para reduzir a classe de possíveis soluções. Por exemplo no caso do plano na mecânica dos fluidos impomos que  $\|\mathbf{u}\| \rightarrow 0$  quando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , onde  $\|\mathbf{x}\|$  representa a distância da partícula teste em relação aos vórtices. Como veremos 1.5.3

No que segue vamos apresentar as equações potenciais que iremos trabalhar, depois discutiremos mais sobre a questão da unicidade para então solucionar a equação.

## Caso gravitacional

Denotemos por  $E_g(= \mathbf{a}_g)$  o *campo (aceleração) gravitacional*. Como comentado anteriormente que seu divergente é dado pela equação

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_g = -c\rho_g, \quad (1.11)$$

$\rho_g(= S)$  a densidade de massa e  $c$  uma constante positiva (com unidade de medida de forma que a equação seja coerente).

O sinal negativo se dá pelo fato de  $\mathbf{E}_g$  ser um campo atrativo. E portanto, contrair volumes.

Sendo  $\mathbf{E}_g$  um campo central, então é um campo irrotacional, ou seja

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E}_g = 0$$

Então como vimos anteriormente, existe  $\varphi_g$  tal que

$$\mathbf{E}_g = -\nabla\varphi_g \quad (1.12)$$

$\varphi_g$  é dito o **potencial gravitacional**. Substituindo a equação acima em (1.11) temos

$$\vec{\nabla} \cdot (-\nabla\varphi_g) = -c\rho_g \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi_g = c\rho_g \quad (1.14)$$

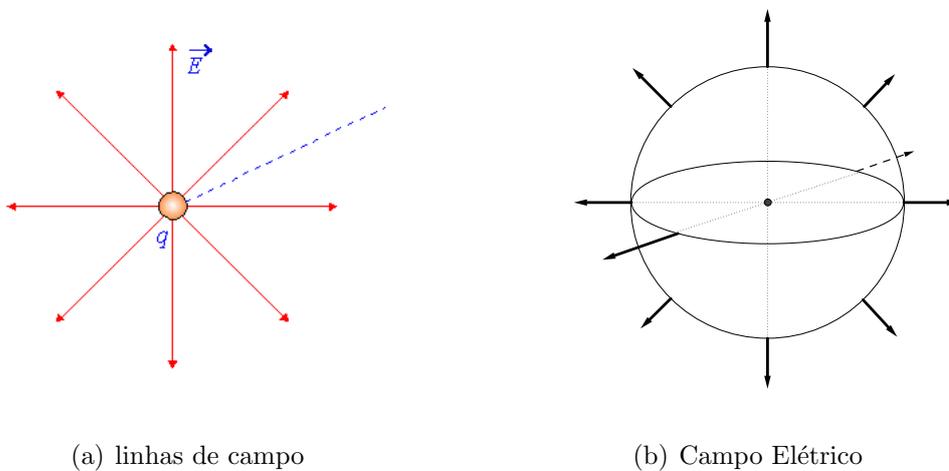
**Observação:** Na literatura, a equação do divergente do campo gravitacional é dada por  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_g = -4\pi G\rho_g$ , e portanto a equação do potencial é  $\Delta\varphi_g = 4\pi G\rho_g$ .

## Caso elétrico

Agora, consideramos o *campo elétrico*  $\mathbf{E}_e (= \mathbf{a}_e)$ . Seu divergente é dado pela equação

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_e = c\rho_e, \quad (1.15)$$

neste caso,  $\rho_e (= S)$  representa a densidade de carga e  $c$  é escolhido da mesma forma como no caso *gravitacional*. A divergência positiva representa a ação repulsora do campo sobre cargas de mesmo “sinal” que a carga que gera o campo. Na mesma direção, isso representa a ação do campo de expandir volumes. Ou seja, o fato de ser uma força repulsora faz com que as partículas afastam. Ver figura 1.8.



(a) linhas de campo

(b) Campo Elétrico

Figura 1.8: Expande volumes

Pela mesma razão que o campo gravitacional (é um campo central), temos

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E}_e = 0$$

Portanto, existe  $\varphi_e$ , o **potencial elétrico**, tal que  $\mathbf{E}_e = \nabla\varphi_e$ . Assim,

$$\vec{\nabla} \cdot (-\nabla\varphi_e) = c\rho_e$$

$$\Rightarrow -\Delta\varphi_e = c\rho_e$$

**Observação:** Na literatura, a equação do divergente para o *campo elétrico* é dada por  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_e = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$ , e a *equação do potencial* é  $-\Delta\varphi_e = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$ , onde  $\varepsilon_0$  é a constante de permissividade do vácuo.

### 1.5.3 A Equação fundamental e a condição extra

Como definimos anteriormente, temos a equação potencial

$$-\Delta\varphi = cS. \quad (1.16)$$

Portanto o potencial  $\varphi$  é a solução de uma *equação de Poisson*. A partir de agora, vamos caminhar no sentido de resolver essa equação.

Como observado anteriormente se  $\varphi$  é uma solução de (1.16),  $\varphi + \alpha$ ,  $\alpha$  qualquer função harmônica, também será. No objetivo de garantirmos a unicidade da solução da equação (1.16) como função que gera um campo irrotacional, com a componente harmônica reduzida a classe de funções constantes, acrescentamos a seguinte condição,

$$\nabla\varphi \rightarrow 0 \text{ quando } \|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty.$$

**Observação.** Note que isso é o mesmo que pedir que o campo que gerou a equação acima satisfaça

$$\mathbf{a} \rightarrow 0 \text{ quando } \|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$$

Sendo a equação de Poisson uma EDP linear, para resolvermos a equação acima vamos buscar a *solução fundamental* (função de Green).

**Definição 1.5.2.** A *função de Green* é a solução de

$$-\Delta G(r, r_0) = \delta(r - r_0)$$

$\forall r \in \mathbb{R}^n$  e  $\delta$  representa a distribuição delta de Dirac.

**Observação:** A não-homogeneidade se concentra em  $r_0$ , chamado de *singularidade*.

Tendo encontrado  $G(r, r_0)$ , a utilizaremos para encontrar a solução geral, que será

$$\varphi(r) = \int_{\mathbb{R}^n} G(r, y)S(y)dy + \alpha,$$

onde  $\alpha$  é uma função harmônica.

Então, como primeiro passo vamos resolver,

$$-\Delta G(r, r_0) = \delta(r - r_0) \tag{1.17}$$

**Observação:** Note que se  $G$  é solução de (1.17),  $G + \beta$ ,  $\beta$  harmônica, também será.

Para restringirmos as soluções e associarmos ao sistema anterior impomos  $\nabla G \rightarrow 0$  quando  $\|r\| \rightarrow \infty$ . Utilizando o fato do laplaciano ser invariante sob rotações, ver em [13], encontramos como *solução fundamental*.

$$\begin{aligned} \Gamma(r, r_0) &= -\frac{1}{2\pi} \log(\|r - r_0\|) && \text{quando } n = 2 \\ &= \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{\|r - r_0\|^{n-2}} && \text{quando } n \geq 3 \end{aligned} \tag{1.18}$$

$r \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ .

Se  $G = \Gamma + \beta$ , da condição imposta a  $G$  e pela forma de  $\Gamma$ , temos que  $\nabla\beta \rightarrow 0$  quando  $\|r\| \rightarrow \infty$ . Portanto  $\beta$  é limitada. Temos o seguinte teorema, conhecido como **Teorema de Liouville** [13]:

**Teorema 9.** *Se  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmônica e limitada. Então  $u$  é constante.*

Então  $G = \Gamma + C$ ,  $C$  constante. Tomando  $C = 0$  temos o seguinte teorema [13]:

**Teorema 10.** *Seja  $f$  uma função de suporte compacto em  $\mathbb{R}^n$  e*

$$-\Delta u = f \tag{1.19}$$

em  $\mathbb{R}^n$ . Então

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y) f(y) dy$$

é solução de (1.19) e  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Então, voltando a nossa equação do potencial (1.16), temos como solução:

$$\varphi(r) = \int_{\mathbb{R}^n} G(r, y) S(y) dy + \alpha(r), \tag{1.20}$$

$\alpha$  harmônica. Portanto temos infinitas soluções.

Por argumentação análoga a feita para  $\beta$ , temos que  $\alpha$  é uma constante. Portanto, num certo sentido, podemos descartá-la.

Então, para os casos que estamos interessados, o que desenvolvemos se aplica como segue.

**CASO GRAVITACIONAL:  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$** 

Considerando que o campo está agindo em  $N$  corpos de massa  $m_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , temos que a não-homogeneidade da equação (1.14) é dada por

$$S(\mathbf{y}) = \rho_g = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_i) \quad \mathbf{y}, \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^n.$$

onde  $m_i, i \in \{1, \dots, N\}$  é a massa de cada um dos  $N$  corpos e  $\mathbf{y}_i$  as posições.

Substituindo em (1.20) temos

$$\varphi_g(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left( \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_i(t)) \right) d\mathbf{y}.$$

Então,

$$\varphi_g(\mathbf{x}, t) = c \left( \sum_{j=1}^N m_j G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j(t)) \right)$$

Utilizando as soluções fundamentais encontradas em (1.18) temos

$$\begin{aligned} \varphi_g(\mathbf{x}, t) &= c \sum_{i=1}^N m_i \log(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)\|) \quad n = 2 \\ &= -c \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)\|} \quad n = 3 \end{aligned}$$

para o *potencial gravitacional*.

**CASO ELÉTRICO:  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$** 

Aqui, invés de pontos de massa, vamos considerar  $N$  pontos de carga, sendo  $q_i, i \in \{1, \dots, N\}$  as cargas de cada um dos  $N$  pontos. Analogamente, ao caso anterior, temos

$$S(\mathbf{y}) = \rho_e = c \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_i).$$

E assim segue,

$$\begin{aligned}\varphi_e(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left( \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_i(t)) \right) d\mathbf{y} \\ \Rightarrow \varphi_e(\mathbf{x}, t) &= \left( \sum_{j=1}^N q_j G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j(t)) \right)\end{aligned}$$

Novamente usando as soluções fundamentais de (1.18), tem-se

$$\begin{aligned}\varphi_e(\mathbf{x}, t) &= -c \sum_{i=1}^N q_i \log(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)\|) \quad n = 2 \\ &= c \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)\|} \quad n = 3\end{aligned}$$

para o *potencial elétrico*.

#### 1.5.4 Teorema de Hodge, decomposição por formas em $\mathbb{R}^2$

Note que o que fizemos acima foi feito para o caso euclidiano. Vamos agora fazer uma decomposição para formas em  $\mathbb{R}^2$  como uma forma de preparação para o que será feito para a esfera.

No que segue vamos considerar superfícies riemannianas, ou seja, variedades com uma métrica  $\mathbf{g}$ ,

$$\mathbf{g} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

uma forma bilinear que associa pares de vetores do espaço tangente em  $p$  a um número real. A partir da métrica vamos associar a todo campo de vetores  $\mathbf{a}$  uma 1-forma da maneira

$$\omega_{\mathbf{a}}(\cdot) = \mathbf{g}(\mathbf{a}, \cdot).$$

Primeiro começamos com  $M$  uma variedade diferenciável e riemanniana de dimensão  $n$ . Denotaremos por  $E^p$  o espaço das  $p$ -formas diferenciáveis em  $M$ .

Denotando  $d$  para a diferenciação exterior e  $*$  para a operador de Hodge (*Hodge star*), que é definido por

**Definição 1.5.3.** *Dado uma  $k$ -forma  $w$  em  $\mathbb{R}^n$ , definimos a  $(n-k)$ -forma  $*w$  por*

$$*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) = (-1)^\sigma (dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-k}}),$$

onde  $\sigma$  é a ordem da permutação dos subíndices.

**Observação:** Essa definição não é válida para uma variedade com uma métrica diferente da identidade. Nesse caso é feita da seguinte maneira [24]: Seja  $w$  uma  $r$ -forma.  $*$  é tal que  $*w$  é uma  $(n-r)$ -forma que satisfaz

$$\psi \wedge *w = \langle \psi, w \rangle_{\mathbf{g}} \eta,$$

onde  $\eta = \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  (forma volume) e  $\psi$  é uma  $r$ -forma qualquer.

Definição tal que usaremos na seção 1.5.5.

As definições abaixo são válidas pra qualquer métrica [28]:

Definimos o seguinte operador:

$$\delta_{\mathbf{g}} : E^p \rightarrow E^{p-1}$$

$$\delta_{\mathbf{g}} = (-1)^{n(p+1)+1} * d* .$$

E a partir dele o operador de *Laplace-Beltrami* [28],

**Definição 1.5.4.** *Definimos como o operador de **Laplace-Beltrami** da seguinte forma*

$$\Delta_{\mathbf{g}} = \delta_{\mathbf{g}} d + d \delta_{\mathbf{g}}.$$

Dizemos que uma  $\omega$   $p$ -forma é harmônica se  $\Delta \omega = 0$ . E denotamos por

$$H^p = \{\omega \in E^p; \Delta_{\mathbf{g}} \omega = 0\}$$

*o espaço das  $p$ -formas harmônicas.*

**Observação 1:** Com o objetivo de não carregar a notação deixaremos implícita a dependência dos operadores em relação a métrica  $\mathbf{g}$ .

**Observação 2:** Essa definição coincide com a nossa noção usual do laplaciano para  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $\mathbf{a}$  um campo de vetorial em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\mathbf{a} \rightarrow 0$  quando  $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$ . Considerando a métrica  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , podemos associar o campo  $\mathbf{a}$  a 1-forma  $\omega_{\mathbf{a}}(\cdot) = \mathbf{g}(\mathbf{a}, \cdot)$ .

A condição imposta ao campo  $\mathbf{a}$  implica impor que  $\omega_{\mathbf{a}} \rightarrow 0$  quando  $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$ . Nesse caso, um forma pode ser decomposta como

$$E^1 = d(E^0) \oplus \delta(E^2) \oplus H^1.$$

Queremos estudar o divergente e o rotacional desse campo. Temos por [11], as definições:

**Definição 1.5.5. (*Divergente*)** *Seja  $\mathbf{v}$  um campo diferenciável, em uma variedade de dimensão 2,*

$$d * \omega_{\mathbf{v}} = (\operatorname{div} \mathbf{v}) dx_1 \wedge dx_2,$$

*onde  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  é o **divergente** do campo  $\mathbf{v}$ .*

**Definição 1.5.6. (*Rotacional*)** *O rotacional de um campo  $\mathbf{v}$  é definido por*

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = *d\omega_{\mathbf{v}}.$$

	notação física analítica ( $\mathbb{R}^3$ )	notação geométrica
$div(\mathbf{a})$	$\nabla \cdot \mathbf{a}$	módulo de $d * \omega_{\mathbf{a}}$
$rot(\mathbf{a})$	$\nabla \times \mathbf{a}$	$*d\omega_{\mathbf{a}}$

Então, pelas definições acima fica evidente que devemos conhecer melhor  $\omega_{\mathbf{a}}$ . E para isso usaremos o *teorema de decomposição de Hodge*, pois ele nos diz que

$$\omega_{\mathbf{a}} = d\omega_1 + \delta\omega_2 + \omega_3,$$

onde  $\omega_1$  é uma 0-forma,  $\omega_2$  uma 2-forma e  $\omega_3$  é uma 1-forma harmônica.

Associaremos com a decomposição em  $\mathbb{R}^2$ ,  $d\omega_1$  a  $\nabla\Phi$ ,  $\delta\omega_2$  a  $J\nabla\Psi$ . De fato, sendo  $\omega_1$  uma 0-forma, então é uma aplicação  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  suave. Portanto,

$$d\omega_1 = d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}dx_2.$$

Para  $\omega_2$ , 2-forma, temos que  $\omega_2 = \Psi dx_1 \wedge dx_2$ , onde  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  suave.

Temos que

$$\begin{aligned} \delta\omega_2 &= (-1)^{2(2+1)+1} * d * (\Psi dx_1 \wedge dx_2) \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}dx_1 - \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}dx_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\omega_{\mathbf{a}} = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}dx_2 \right) + \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}dx_1 - \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}dx_2 \right) + \omega_3.$$

Antes de calcularmos o divergente e o rotacional do campo, vamos explorar o fato de  $\omega_3$  ser harmônico. Sendo  $\omega_3$  uma 1-forma,

$$\omega_3 = \gamma_1 dx_1 + \gamma_2 dx_2,$$

onde  $\gamma_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  suave,  $i \in \{1, 2\}$ . Temos que

$$\Delta\omega_3 = 0 \quad (1.21)$$

$$\Rightarrow (\delta d + d\delta)\omega_3 = 0 \quad (1.22)$$

$$\delta d\omega_3 + d\delta\omega_3 = 0. \quad (1.23)$$

Fazendo as contas,

$$\delta d\omega_3 = \left( \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_2^2} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1^2} \right) dx_2 \quad (1.24)$$

e

$$d\delta\omega_3 = \left( -\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx_1 + \left( -\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_2^2} \right) dx_2. \quad (1.25)$$

Somando as equações (1.24) e (1.25), e acrescentando a informação de (1.23),

$$-\left( \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_2^2} \right) dx_1 - \left( \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_2^2} \right) dx_2 = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_2^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_2^2} &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções harmônicas. Aplicando as condições, implica que as funções  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são limitadas, portanto,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são constantes.

Voltando ao nosso objetivo, vamos começar calculando o divergente do campo  $\mathbf{a}$ .

$$d*\omega_{\mathbf{a}} = d*\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 \right) + d*\left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_2 \right) + d*(\gamma_1 dx_1 + \gamma_2 dx_2).$$

Calculamos separadamente cada uma das parcelas dessa soma:

a)

$$\begin{aligned} d * \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 \right) &= d \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_2 \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) dx_1 \wedge dx_2 = \Delta \Phi dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} d * \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_2 \right) &= d \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 \right) \\ &= \left( -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 = 0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} d * (\gamma_1 dx_1 + \gamma_2 dx_2) &= d(-\gamma_2 dx_1 + \gamma_1 dx_2) \\ \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 &= 0, \text{ pois } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ são constantes.} \end{aligned}$$

Por a), b) e c),  $d * \omega_{\mathbf{a}} = \Delta \Phi dx_1 \wedge dx_2$ . Por definição,

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}) = \Delta \Phi.$$

Agora, vamos calcular o rotacional. Segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{a}) &= *d\omega_{\mathbf{a}} = *d \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 \right) \\ &+ *d \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_2 \right) + *d(\gamma_1 dx_1 + \gamma_2 dx_2). \end{aligned}$$

Novamente pelo iremos calcular separadamente as parcelas.

a)

$$\begin{aligned} *d \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 \right) &= * \left( -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{aligned}$$

b)

$$*d \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_2 \right) = *(-\Delta \Psi) dx_1 \wedge dx_2 = -\Delta \Psi.$$

c)

$$*d(\gamma_1 dx_1 + \gamma_2 dx_2) = * \left( -\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

Juntando os três cálculos, temos que

$$rot(\mathbf{a}) = -\Delta \Psi$$

Considerando que estamos um campo irrotacional,  $rot(\mathbf{a}) = 0$  e  $div(\mathbf{a}) = \Delta \Phi \neq 0$ . Então a equação fundamental é dada por

$$\Delta \Phi = cS.$$

### 1.5.5 Equação do potencial na esfera

Antes de encontrarmos a equação do potencial na esfera, vamos enunciar o *Teorema de Decomposição de Hodge*, utilizando Warner [28] como base, e com apoio de do Carmo [11] e Arnold [2]. Vamos enunciar para um caso mais geral e então aplicaremos no caso da esfera ( $n = 2$ ) para atingir nosso objetivo.

**Teorema 11. (*Teorema de Decomposição de Hodge*)** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável, riemanniana e compacta de dimensão  $n$ . Para cada inteiro  $p$  com  $0 \leq p \leq n$ ,  $H^p$  é dimensionalmente finito. E segue a decomposição:*

$$\begin{aligned} E^p &= d\delta(E^p) \oplus \delta d(E^p) \oplus H^p \\ &= d(E^{p-1}) \oplus \delta(E^{p+1}) \oplus H^p \end{aligned}$$

A demonstração pode ser encontrada em [28].

Tendo estabelecido tal teorema, passamos a estudar o caso da esfera  $M$  de dimensão 2. Note que ela satisfaz as hipóteses.

**Observação** No caso da esfera utilizamos a decomposição

$$E^1 = d(E^0) \oplus \delta(E^2) \oplus H^1.$$

Seja  $\mathbf{a}$  um campo vetorial na esfera  $M$  de dimensão 2. Considere uma métrica dada por

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + 2g_{12}dx_1dx_2,$$

$$\text{e } \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad g_{12} = g_{21}.$$

Associamos o campo  $\mathbf{a}$  a uma 1-forma, como feito anteriormente,  $\omega_{\mathbf{a}}(\cdot) = \mathbf{g}(\mathbf{a}, \cdot)$ .

Utilizando o *teorema de decomposição de Hodge*,

$$\omega_{\mathbf{a}} = d\omega_1 + \delta\omega_2 + \omega_3,$$

onde  $\omega_1$  é uma 0-forma,  $\omega_2$  uma 2-forma e  $\omega_3$  uma 1-forma harmônica.

Da mesma forma que o feito em  $\mathbb{R}^2$ , denotamos  $\omega_1 = \Phi$  e  $\omega_2 = \Psi dx_1 \wedge dx_2$ .

Analogamente ao que fizemos antes e utilizando a seguinte proposição [28]:

**Proposição 1.5.1.** *As únicas funções harmônicas em uma variedade riemanniana, conexa, compacta e orientada são as funções constantes.*

Temos

$$\text{div}(\mathbf{a}) = \Delta_{\mathbf{g}}\Phi$$

$$\text{rot}(\mathbf{a}) = \Delta_{\mathbf{g}}\Psi.$$

Considerando um capô central, ou seja,  $\operatorname{div}(\mathbf{a}) = cS \neq 0$  e  $\operatorname{rot}(\mathbf{a}) = 0$ , nossa equação fundamental será

$$\Delta_{\mathbf{g}}\Phi = cS.$$

Observe que a equação depende da métrica, mais especificamente, o operador de Laplace-Beltrami depende de  $\mathbf{g}$ . Vamos explicitar essa dependência para um caso particular de métrica. Consideramos uma métrica diagonal, ou seja,  $g_{12} = g_{21} = 0$ . Logo  $ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2$ .

Queremos calcular  $\operatorname{div}(\nabla\Phi)$ . Por definição,

$$d * \omega_{\nabla\Phi} = \operatorname{div}(\nabla\Phi)\nu,$$

onde  $\nu = \sqrt{|\det\mathbf{g}|}dx_1 \wedge dx_2 = \sqrt{|g_{11}g_{22}|}dx_1 \wedge dx_2$  é a forma de volume de uma variedade riemanniana.

Primeiro note que  $\omega_{\nabla\Phi} = d\Phi$ . Logo

$$*\omega_{\nabla\Phi} = \frac{\sqrt{|g_{11}g_{22}|}}{g_{11}} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\sqrt{|g_{11}g_{22}|}}{g_{22}} \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} dx_1.$$

Aplicando a diferencial exterior,

$$\begin{aligned} d * \omega_{\nabla\Phi} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\sqrt{|g_{11}g_{22}|}}{g_{11}} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\sqrt{|g_{11}g_{22}|}}{g_{22}} \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \right) dx_2 \wedge dx_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{g_{11}} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{g_{22}} \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \right) \right] \sqrt{|\mathbf{g}|} dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{g_{11}} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{g_{22}} \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \right) \right] \nu, \end{aligned}$$

onde  $\sqrt{|\mathbf{g}|} = \sqrt{|\det \mathbf{g}|}$ .

Portanto,

$$\Delta_{\mathbf{g}}\Phi = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{g_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\sqrt{|\mathbf{g}|}}{g_{22}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \right].$$

Tomando como exemplo as coordenadas polares de uma esfera de raio 1, temos que nesse caso a métrica é

$$ds^2 = \text{sen}^2\theta d\phi^2 + d\theta^2,$$

com a matriz  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \text{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  representando a métrica, então  $g_{11} = \text{sen}^2\theta$  e  $g_{22} = 1$ . Portanto, substituindo em (1.5.5),

$$\Delta_{\mathbf{g}}\Phi = \frac{1}{\text{sen}\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right].$$

É o mesmo laplaciano encontrado em [18].

### 1.5.6 Condição de Gauss

Dada uma equação de Poisson

$$\Delta_{\mathbf{g}}\varphi = cS,$$

em uma superfície compacta sem bordo, no nosso caso a esfera, o termo de não-homogeneidade ( ou a fonte do campo) deve satisfazer a seguinte condição, denominada *condição de Gauss*:

Da equação temos

$$\int_M \Delta_{\mathbf{g}}\varphi dA = \int_M cS dA.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_M \Delta_g \varphi dA &= \int_M \nabla \cdot \nabla \varphi dA \\ &= \int_{\partial M} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois não tem bordo. Logo,

$$\int_M cS dA = 0.$$

No nosso caso, se  $S = \sum_1^N m_i \delta(r - r_i)$ ,

$$\int_M cS dA = c \sum_{i=1}^N m_i \int_M \delta(r - r_i) = \frac{c}{\text{area}(M)} \sum_{i=1}^N m_i \neq 0.$$

Portanto, nosso termo de não-homogeneidade não pode ser mais o mesmo, devemos ter um termo de compensação para satisfazer a condição de Gauss. A escolha dessa compensação pode ser feita de várias maneiras diferentes. Destacamos duas escolhas:

- A escolha que faremos consiste em cobrir a esfera com um “tapete” de distribuição de massa negativa (que pode ser interpretada como anti-matéria).

Essa escolha resulta numa não-homogeneidade igual a

$$cS - \frac{c m_{tot}}{\text{area}(M)},$$

onde  $m_{tot}$  é a massa total.

- Uma outra escolha é a cada corpo de massa incluímos um corpo antípoda de massa negativa com velocidade inversa Shchepetilov[27]. Dessa forma teríamos a homogeneidade

$$cS - \sum_1^N c m_i \delta(r - \tilde{r}_i(t)).$$

Da mesma forma temos que considerar a condição de Gauss para encontrarmos a função de Green. Ou seja, a função de Green será solução da equação:

$$\Delta_{\mathbf{g}}G(s, s_0) = c \left( \delta(s - s_0) - \frac{1}{\text{area}(M)} \right).$$

por argumentos análogos ao feito para o caso acima.

## 1.6 Dinâmica de massas e cargas puntiformes

Aqui vamos observar a “dualidade” de um corpo puntiforme que pode agir tanto como partícula teste quanto uma singularidade.

Isso ocorre pelo fato das singularidades também estarem sob a ação de um campo gerado pelos outros corpos ( inclusive a partícula teste). Portanto, ao escolhermos uma das singularidades e estudarmos o campo que age sobre ela, essa singularidade desempenhará o papel de partícula, e o corpo que era partícula teste anteriormente, se torna uma singularidade para esse campo.

Começamos por ressaltar que nesse caso o Hamiltonianos do sistema das  $m_1, m_2, \dots, m_N$  massas é autônomo, dado por

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2m_j} \|\mathbf{p}_j\|_{\mathbf{g}^{-1}}^2 + V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n),$$

onde é

$$V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N) = \sum_{1=i < j}^N m_i m_j G(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j).$$

que é deduzido a partir da seguinte hipótese de trabalho:

**Hipótese de trabalho:** cada massa (fonte do campo gravitacional) se comporta como partícula no campo das outras massas N-1 massas.

Observe que a métrica  $\mathbf{g}$  determina tanto a parte cinética de  $H$ , através do produto interno dos momentos  $\mathbf{p}_j$ ,

$$\|\mathbf{p}_j\|_{\mathbf{g}^{-1}}^2,$$

**Exemplo.** Considere dois corpos de massa interagindo. Um corpo de massa  $m_1$  e posição  $r_1$  e o outro de massa  $m_2$  e posição  $r_2$ . Pelo feito na seção anterior, o potencial é dado por

$$V(r_1, r_2) = m_1 m_2 G(r_1, r_2).$$

## Capítulo 2

# O problema dos dois corpos no plano imerso em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo consideramos o problema dos dois corpos com a dinâmica restrita a um plano. Denotemos por  $\mathbf{q}_i$  a posição,  $\mathbf{p}_i$  momento e  $m_i$  a massa do  $i$ -ésimo corpo,  $i = 1, 2$ .



Figura 2.1: Dois corpos no plano

Vamos começar considerando a noção de integrabilidade de um sistema de equações diferenciais ordinárias com  $2n$  graus de liberdade. Em particular, queremos ressaltar o papel da estrutura hamiltoniana em reduzir o número de integrais primeiras necessárias o estudo da integrabilidade do sistema.

## 2.1 Formulação hamiltoniana

Consideramos um sistema de  $N$  partículas de massa  $m_1, \dots, m_N$  cuja dinâmica é descrita pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1i} &= \frac{\partial H}{\partial p_{1i}} & \dot{p}_{1i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{1i}} \\ \dot{q}_{2i} &= \frac{\partial H}{\partial p_{2i}} & \dot{p}_{2i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{2i}} \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, 0)$ ,  $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, 0)$  e  $i = 1, 2, \dots, N$ .

O hamiltoniano é dado por:

$$H(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|_{\mathbf{g}}^2}{2m_i} + V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N) \quad (2.1)$$

onde  $V$  é o potencial e a norma do momento da  $i$ -ésima partícula é definida como

$$\|\mathbf{p}_i\|_{\mathbf{g}}^2 = \mathbf{p}_i^T \mathbf{g}^{-1} \mathbf{p}_i,$$

onde  $\mathbf{g}$  é o tensor métrico, que em coordenadas cartesianas é  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Note que temos um problema com  $2N$  graus de liberdade *hamiltoniano*.

Definindo  $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  e  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_N}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_N} \right)$ , podemos escrever o sistema acima na forma reduzida

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = J \nabla H, \quad (2.2)$$

onde  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_{2N \times 2N} \\ -I_{2N \times 2N} & 0 \end{pmatrix}$ , e  $I$  é a matriz identidade.

## 2.2 Integrais de movimento

Formulado o sistema como vimos, temos como objetivo encontrar as integrais de movimento necessárias para poder mostrar a integrabilidade. Vemos no que segue que no caso geral precisamos de  $4N - 1$  integrais independentes e que no caso hamiltoniano as integrais se reduzem a  $2N$ , mas em involução.

### 2.2.1 Caso geral

Seguindo [12] e [19] vamos fazer uma introdução a integrais de movimento. Portanto, seja a equação diferencial

$$\dot{x} = \tilde{F}(x), \quad (2.3)$$

$\tilde{F} : A \subseteq \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$ ,  $A$  aberto.

**Definição 2.2.1.**  $W : A \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável é uma *integral primeira* se:

- se  $x(t)$  é solução de (2.3), então  $W(x(t))$  é constante.
- $\exists U \subseteq A$  aberto, tal que  $W$  não é constante em  $U$ .

Portanto, as soluções da equação diferencial (2.3) permanecem em uma única superfície de nível da integral primeira. Um conceito importante envolvendo integrais primeiras é a independência entre elas.

**Definição 2.2.2.** Sejam,  $W_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4n - 1\}$  integrais primeiras. Então  $W_1, W_2, \dots, W_{4n-1}$  são ditas *integrais independentes* se os vetores  $\nabla W_1(x), \nabla W_2(x), \dots, \nabla W_{4n-1}(x)$  são linearmente independentes para todo  $x \in A - \{x; \tilde{F}(x) = 0\}$ .

**Definição 2.2.3.** A equação (2.3) é dita **integrável** se possui  $4n - 1$  integrais primeiras independentes.

Portanto, encontrando as  $4n - 1$  integrais primeiras e fazendo a interseção das superfícies de nível definidas por elas, obtemos a curva solução de (2.3).

## 2.2.2 Caso Hamiltoniano

Considerando um sistema Hamiltoniano autônomo

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = J\nabla H, \quad (2.4)$$

onde  $H$  é um Hamiltoniano independente do tempo. Observe que por enquanto estamos considerando um caso geral e não necessariamente um sistema mecânico.

Vamos introduzir o colchete de Poisson, pois nos será de grande utilidade para identificarmos integrais primeiras. Para mais informações sobre colchete de Poisson ver [16],[2].

**Definição 2.2.4.** Seja  $A$  o plano de fase de dimensão  $4n$ ,  $D(A)$  o espaço das funções diferenciáveis  $A \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos

$$\{, \} : D(A) \rightarrow D(A)$$

$$\{f, g\} = \nabla^T f \cdot J\nabla g$$

ser o **colchete de Poisson** onde  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ -I_{2n} & 0 \end{pmatrix}$ .

**Observação** Pela definição, explicitamente temos:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_{ij}} \frac{\partial g}{\partial p_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial p_{ij}} \frac{\partial g}{\partial q_{ij}},$$

4n a dimensão de  $A$ .

Tendo sido introduzido o Colchete de Poisson, para identificarmos quando  $f \in D(A)$  é uma integral primeira, temos o seguinte teorema:

**Teorema 12.** *Seja  $f \in D(A)$ ,  $f$  é uma integral se, e somente se  $\{f, H\} = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $\phi(t, t_0, (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)) : A \rightarrow A$  solução de (2.4),  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{X}_0$  condição inicial dada e  $f \in D(A)$ . Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\phi(t, t_0, \mathbf{X}_0)) &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} f(\phi(t, t_0, \mathbf{X}_0)) &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\phi(t, t_0, \mathbf{X}_0)) = \{f, H\} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} f(\phi(t, t_0, \mathbf{X}_0)) = 0 \iff \{f, H\} = 0$$

□

Observando a antissimetria de  $\{, \}$ , segue que  $\{H, H\} = -\{H, H\}$ , portanto  $\{H, H\} = 0$ ,  $H$  é uma integral primeira.

**Definição 2.2.5.** *Duas funções,  $f_1, f_2$  estão em involução se  $\{f_1, f_2\} = 0$ .*

O **Teorema de Liouville-Arnold** pode ser enunciado, informalmente, da seguinte maneira [2]:

**Teorema 13.** *Seja um sistema Hamiltoniano com  $4n$  graus de liberdade hamiltoniano. Se o sistema tiver  $2n$  integrais primeiras independentes em involução, então o sistema é integrável por quadraturas.*

Então passamos a ter como objetivo encontrar  $2n$  integrais satisfazendo as hipóteses acima. Utilizando a geometria do sistema, ganharemos intuição de onde procurá-las, para isso, vamos introduzir a noção de simetria simplética e o *Teorema de Noether* [16].

Seja  $\psi_s(\mathbf{X}) = \psi(s, \mathbf{X})$  um fluxo hamiltoniano solução de

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds} = J\nabla G(\mathbf{X})$$

onde  $G : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}$  suave (Sistema Hamiltoniano).

**Definição 2.2.6.**  $\psi_s(\mathbf{X})$  é dito uma **simetria simplética de  $H$**  se

$$H(\mathbf{X}) = H(\psi_s(\mathbf{X}))$$

para todo  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{4n}$  e para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 14. (Teorema de Noether)** *Seja  $\psi_s(\mathbf{X})$  uma simetria simplética para o Hamiltoniano de (2.4) e solução de  $\frac{d\mathbf{X}}{ds} = J\nabla G(\mathbf{X})$ . Então  $G$  é uma integral primeira do sistema (2.4).*

*Demonstração.* Sendo  $\psi(s, \mathbf{X})$  uma simetria simplética de  $H$ .

$$\frac{\partial H}{\partial s}(\psi(s, \mathbf{X})) = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial s}(\psi(s, \mathbf{X})) &= \nabla H \cdot \frac{\partial \psi(s, \mathbf{X})}{\partial s} \\ &= \nabla H \cdot J\nabla G(\psi(s, \mathbf{X})) \\ &= \{H, G\}(\psi(s, \mathbf{X})) = 0 \end{aligned}$$

### 2.2.3 Mecânica celeste

#### O problema dos dois corpos

Vamos, agora, nos focar na dinâmica de dois corpos no plano imerso em  $\mathbb{R}^3$ , isto é,  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Denotaremos por  $\mathbf{q}_1 = (q_{11}, q_{12}, 0)$  e  $\mathbf{q}_2 = (q_{21}, q_{22}, 0)$  as posições das duas partículas em coordenadas cartesianas.

O hamiltoniano  $H$  é dado como em Eq.(2.1) com  $N = 2$  e

$$V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = -\frac{c m_1 m_2}{\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|}$$

**Afirmção 1.**  $H$  é invariante sob translações e rotações.

A invariância de  $H$  sob translações e rotações nos fornecerá as integrais primeiras (pelo teorema 14) momento linear total  $\mathbf{P}_{tot}$  e momento angular  $L = \|\vec{L}\|$  respectivamente, onde  $\|\cdot\|$  é norma euclidiana habitual em  $\mathbb{R}^3$ .

O **momento linear total** do sistema (2.2) é dado por

$$\mathbf{P}_{tot} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = (p_{11} + p_{21}, p_{12} + p_{22}, 0), \quad (2.5)$$

$\mathbf{p}_1 = (p_{11}, p_{12}, 0)$  e  $\mathbf{p}_2 = (p_{21}, p_{22}, 0)$ . Denotamos  $P_1 = p_{11} + p_{21}$  e  $P_2 = p_{12} + p_{22}$ , onde  $P_1$  e  $P_2$  são integrais primeiras.

Sendo a posição do centro de massa  $\mathbf{Q}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2}{m_1 + m_2}$ . Definimos

$$\vec{L} := \mathbf{Q}_{cm} \wedge \mathbf{P}_{tot} \quad (2.6)$$

$\vec{L}$  é o vetor de **momento angular**.

Portanto, tem-se que

$$\vec{L} = \frac{1}{m_1 + m_2} (0, 0, (m_1 q_{11} + m_2 q_{21})(p_{12} + p_{22}) - (m_2 q_{22} + m_1 q_{12})(p_{11} + p_{21})).$$

Denotando

$$L = (m_1 q_{11} + m_2 q_{21})(p_{12} + p_{22}) - (m_2 q_{22} + m_1 q_{12})(p_{11} + p_{21}).$$

Resumindo, temos quatro integrais primeiras:  $H$ ,  $L$ ,  $P_1$  e  $P_2$ . Desde que o sistema tem 8 graus de liberdade, isto é, 4 graus de liberdade hamiltonianos, segue do Teorema de Arnold-Liouville que necessitaríamos de 4 integrais em involução.

Portanto nos questionamos se as quatro integrais que encontramos são independentes e se estão em involução. Note que se isso ocorre, provamos a integrabilidade. Na próxima seção mostraremos que temos apenas três integrais em involução, mas a integrabilidade pode ser provada devido às simetrias extras, as das equações.

## 2.3 Integrabilidade

Consideramos as quatro integrais encontradas na seção anterior,  $H$ ,  $L$ ,  $P_1$  e  $P_2$ . Vamos verificar se satisfazem as hipóteses do *teorema de Arnold-Liouville*. Note que  $H$  está em involução com as outras três integrais pelo Teorema 12. Vamos testar se as outras estão duas a duas em involução.

**Proposição 2.3.1.**

$$\{H, L\} = \{H, P_1\} = \{H, P_2\} = \{P_1, P_2\} = \{L, P_1^2 + P_2^2\} = 0$$

$$\{L, P_1\} = MP_2, \quad \{L, P_2\} = -MP_1,$$

onde  $M = m_1 + m_2$ .

*Demonstração.* Primeiro, fazendo para  $P_1$  e  $P_2$ .

$$\{P_1, P_2\} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial P_1}{\partial q_{ij}} \frac{\partial P_2}{\partial p_{ij}} - \frac{\partial P_1}{\partial p_{ij}} \frac{\partial P_2}{\partial q_{ij}}$$

Como  $P_1$  e  $P_2$  não dependem de  $q_{ij}$ , para  $i$  e  $j$  quaisquer, temos

$$\{P_1, P_2\} = 0$$

$$\{L, P_1\} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial L}{\partial q_{ij}} \frac{\partial P_1}{\partial p_{ij}} - \frac{\partial L}{\partial p_{ij}} \frac{\partial P_1}{\partial q_{ij}}$$

De novo, usando o fato que  $P_1$  não depende de  $q_{ij}$  e além disso, não depende de  $p_{12}$  e  $p_{22}$ , temos

$$\begin{aligned} \{L, P_1\} &= \frac{\partial L}{\partial q_{11}} \frac{\partial P_1}{\partial p_{11}} + \frac{\partial L}{\partial q_{21}} \frac{\partial P_1}{\partial p_{21}} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_{11}} + \frac{\partial L}{\partial q_{21}} = M(p_{12} + p_{22}) = MP_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

E, de forma completamente análoga, temos

$$\{L, P_2\} = -M(p_{11} + p_{21}) = -MP_1$$

$L$  e  $P_2$  não estão em involução.

Finalmente fazemos para  $P_1^2 + P_2^2$  e  $L$ . Temos pela linearidade do colchete de Poisson,

$$\begin{aligned} \{L, P_1^2 + P_2^2\} &= \{L, P_1^2\} + \{L, P_2^2\} \\ &= 2\{L, P_1\}P_1 + 2\{L, P_2\}P_2 \\ &= 2MP_2P_1 - 2MP_1P_2 = 0 \end{aligned}$$

□

Segue da proposição acima, segue  $L$  não está em involução com  $P_1$ , nem com  $P_2$ .

Portanto, essas quatro integrais não verificam as hipóteses *teorema de Arnold-Liouville*, assim, ainda não nos garante que o sistema é integrável. Observamos agora que o sistema mecânico em estudo verifica a segunda lei de Newton, ou seja

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \nabla V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \quad \text{e} \quad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \nabla V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2).$$

Portanto, as acelerações são invariantes em todos os sistemas de referência inerciais, ou seja

$$\frac{d(\mathbf{v}_1 + \mathbf{u})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d(\mathbf{v}_2 + \mathbf{u})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt},$$

onde  $\mathbf{u}$  é uma velocidade constante.

Isto significa que todos os sistemas de referência inercial são equivalentes. Utilizaremos essas simetrias extras que o nosso sistema é integrável.

## 2.4 Redução

Utilizamos simetrias para fazemos o processo de *redução*.

As Simetrias Hamiltonianas, que utilizando o *Teorema de Noether* estudado anteriormente, nos fornece integrais de movimento.

Abaixo segue um esquema das simetrias hamiltonianas do nosso sistema, e as integrais de movimento relacionada.

• **Simetrias hamiltonianas** (simetria  $\Rightarrow$  integral de movimento)

Translação com relação a  $x \Rightarrow P_x$  (momento total)

Translação com relação a  $y \Rightarrow P_y$  (momento total)

Rotação  $\Rightarrow L$  (momento angular)

Translação com relação a  $t \Rightarrow H$  (hamiltoniano).

E as Simetrias das Equações. Essas simetrias vem da equivalência dos sistemas referenciais inerciais, fato esse conheci como *invariância galileana* ou *princípio da relatividade galileana* [2].

• **Simetrias das equações** (Invariância Galileana)

– acréscimo de velocidade constante na direção  $x$

– acréscimo de velocidade constante na direção  $y$

A aceleração do sistema permanece a mesma. O centro de massa tem movimento retílineo uniforme nas duas direções.

A força aplicada na  $k$ -ésima partícula é dada por

$$\vec{F}_k = m_k \mathbf{a}_k = \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{Gm_j m_k}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|^2} \hat{\mathbf{r}}_{jk},$$

onde  $\hat{\mathbf{r}}_{jk} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|}$ .

Logo,

$$\vec{F}_t = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{a}_k = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{Gm_j m_k}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k\|^2} \hat{\mathbf{r}}_{jk} = 0.$$

$$\vec{F}_t = \frac{d}{dt} \mathbf{P}_{tot} = 0$$

$\Rightarrow \mathbf{P}_{tot}$  é constante.

Seja  $M = \sum_{i=1}^N m_i$ ,

$$\mathbf{q}_{cm} := \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i}{M}$$

Então

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{\mathbf{P}_{tot}}{M}.$$

Usamos a invariância galileana para escolhermos um referencial onde

$$\mathbf{v}_{cm} = 0.$$

No caso de dois corpos no plano essa escolha tem as seguintes consequências:

•

$$\mathbf{v}_{cm} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{tot} = 0,$$

então

$$P_{1x} + P_{2x} = 0 \Rightarrow P_{2x} = -P_{1x}$$

$$P_{1y} + P_{2y} = 0 \Rightarrow P_{2y} = -P_{1y}.$$

Note que aqui, passamos de quatro para somente duas incógnitas.

- O centro de massa está em repouso, pela invariância por translações escolhamos de forma que fique na origem,

$$m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2 = 0.$$

$$m_1 q_{1x} + m_2 q_{2x} = 0 \Rightarrow q_{2x} = -\frac{m_1}{m_2} q_{1x}$$

$$m_1 q_{1y} + m_2 q_{2y} = 0 \Rightarrow q_{2y} = -\frac{m_1}{m_2} q_{1y}.$$

Da mesma forma que feita anteriormente, passamos de quatro incógnitas para duas.

Juntando as duas etapas, na verdade, passamos de oito para quatro. Dessa forma de diminuimos a dimensão do sistema:

$$8 \rightarrow 4.$$

Ao escolhermos um valor para  $L$  diminuimos mais uma.

$$4 \rightarrow 3.$$

Utilizando a invariância por rotações.

$$3 \rightarrow 2.$$

Finalmente, usando o hamiltoniano  $H$ ,

$$2 \rightarrow 1.$$

Logo o sistema é integrável.

Seguindo as idéias de [21], vamos fazer uma redução de dimensões do problema, usando as integrais encontradas na seção 2.2. Começamos por fazer uma mudança de variáveis que preserve a estrutura do Hamiltoniano (ver seção 1.3.3). Lembrando que nosso Hamiltoniano é dado por

$$H(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\|\mathbf{p}_1\|^2}{2m_1} + \frac{\|\mathbf{p}_2\|^2}{2m_2} + V(\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|) \quad (2.8)$$

Então, definindo

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 \quad \bar{\mathbf{Q}} = \frac{m_2 \mathbf{q}_2 + m_1 \mathbf{q}_1}{m_1 + m_2} \quad (2.9)$$

Temos como momentos conjugados, respectivamente

$$\mathbf{P} = \frac{m_1 \mathbf{p}_2 - m_2 \mathbf{p}_1}{m_1 + m_2} \quad \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (2.10)$$

**Observação** Essa mudança foi feita para usarmos as integrais que já temos  $P_1$  e  $P_2$ . Pois, por (2.5),  $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_{tot}$ . Disso, já podemos inferir que, sendo as coordenadas de  $\bar{\mathbf{P}}$  integrais primeiras, temos  $\dot{\bar{\mathbf{P}}} = 0$ , portanto,  $H$  nas novas coordenadas não dependerá de  $\bar{\mathbf{Q}}$ .

Substituindo em (2.8) as novas definições (2.9) e (2.10), temos

$$H(\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{P}, \bar{\mathbf{P}}) = \frac{\|\bar{\mathbf{P}}\|^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\|\mathbf{P}\|^2}{2\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)} + V(\|\mathbf{Q}\|)$$

com as novas equações

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right) \mathbf{P} & \dot{\bar{\mathbf{P}}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{Q}}} V(\|\mathbf{Q}\|) \\ \dot{\bar{\mathbf{Q}}} &= \frac{\bar{\mathbf{P}}}{m_1 + m_2} & \dot{\mathbf{P}} &= 0 \end{aligned}$$

Observe que  $\bar{\mathbf{Q}}$  é a posição do centro de massa do sistema. De  $\dot{\bar{\mathbf{P}}} = 0$  temos que  $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_0$  constante. Logo  $\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \frac{\mathbf{P}_0}{m_1 + m_2}$ , então  $\bar{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{P}_0 t}{m_1 + m_2} + \mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{C}_0$  constante.

Portanto, temos que o centro de massa está em movimento uniforme, então as questões importantes em relação a dinâmica do sistema se limitam à posição relativa entre os dois corpos. Ou seja, podemos considerar o Hamiltoniano

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; \bar{\mathbf{P}}) = \frac{\|\mathbf{P}\|^2}{2\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)} + V(\|\mathbf{Q}\|) + C(\bar{\mathbf{P}})$$

onde  $C(\bar{\mathbf{P}})$  é uma constante.

Logo é equivalente a

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{\|\mathbf{P}\|^2}{2 \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)} + V(\|\mathbf{Q}\|) \quad (2.11)$$

Tendo feito isso, reduzimos o nosso problema, ao bem conhecido *Problema de Kepler*, que será discutido na próxima seção.

Ou seja, resolvendo o problema de Kepler com o Hamiltoniano (2.11), resolvemos o sistema inicial. Observe que, como prometido, diminuimos o grau de liberdade do sistema de 4 para 2.

## 2.5 O Problema de Kepler

O *problema de Kepler* se estabelece por considerar um caso especial, onde se considera um dos corpos fixo e o outro em movimento. Um exemplo desse tipo de dinâmica pode ser visto na relação Sol-Terra, onde o Sol é considerado fixo, e a Terra orbita ao seu redor. Esse tipo de dinâmica se dá, geralmente, quando um corpo possui uma massa grande em relação ao outro.

### 2.5.1 Caso Geral

Sejam dois corpos de massa  $m$  e  $M$ . Consideremos que o corpo de massa  $M$  é o corpo fixo. Sem perda de generalidade, definimos a origem do espaço coordenado sobre tal corpo. Denotemos por  $\mathbf{q}$  a posição do corpo de massa  $m$  em relação à origem (em particular, em relação ao outro corpo).

Como a energia cinética do corpo fixo é nula, pois está parado, a dinâmica

é representada pelo Hamiltoniano

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} - V(\mathbf{q})$$

onde  $\mathbf{p}$  é o momento conjugado a  $\mathbf{q}$ , e pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial V(\|\mathbf{q}\|)}{\partial \mathbf{q}}\end{aligned}$$

Como podemos considerar que a dinâmica está restrita a um plano, temos um sistema com dois graus de liberdade.

Considere  $\mathbf{q} = (x, y, 0)$  e  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, 0)$ . Vamos passar para coordenadas polares  $(r, \theta)$

$$\begin{aligned}r &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \theta &= \arctg\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

Sendo uma transformação canônica, temos como momentos:

$$\begin{aligned}p_r &= p_x \cos\theta + p_y \sin\theta \\ p_\theta &= -rp_x \sin\theta + rp_y \cos\theta\end{aligned}$$

Portanto o novo Hamiltoniano é dado por

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2.12)$$

Com as equações

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{p_r}{m} & \dot{p}_r &= \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2} & \dot{p}_\theta &= 0\end{aligned} \quad (2.13)$$

Note que o sistema dado pelas equações dadas em (2.13), é um sistema de duas incógnitas e duas equações, uma vez  $p_\theta$  é constante. Vamos encontrar  $r$ , pois feito isso, resolvemos o sistema. Defina, considerando  $p_\theta \neq 0$ ,

$$u = \frac{1}{r} \frac{dt}{d\theta} = \frac{r^2 m}{p_\theta} \quad (2.14)$$

De (2.13) temos

$$\ddot{r} = \frac{\dot{p}_r}{m} = \frac{p_\theta^2}{m^2 r^3} - \frac{1}{m} \frac{dV}{dr}$$

Sendo  $V(r) = -\frac{k}{r}$ ,  $k > 0$  e usando (2.14) temos

$$\ddot{r} = \frac{p_\theta^2 u^3}{m^2} - \frac{ku^2}{m} \quad (2.15)$$

Por outro lado, fazendo  $r(\theta(t))$ , temos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \\ &= \frac{p_\theta}{m} u^2 \frac{du^{-1}}{d\theta} = \frac{p_\theta}{m} u^2 \left( -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \\ &= -\frac{p_\theta}{m} \frac{du}{d\theta} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{p_\theta}{m} \frac{d}{dt} \frac{du}{d\theta} = -\frac{p_\theta}{mr^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \\ &= -\frac{p_\theta^2}{m^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Igualando (2.15) e (2.16) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{p_\theta^2 u^3}{m^2} - \frac{ku^2}{m} &= -\frac{p_\theta^2}{m^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u - \frac{km}{p_\theta^2} &= 0, \end{aligned}$$

que é a equação diferencial de um oscilador não-homogêneo, cuja solução é dada por

$$u = \left( \frac{km}{p_\theta^2} \right) (1 + e \cos(\theta - \theta_0)),$$

onde,  $e$  e  $\theta_0$  são constantes de integração. Portanto, por (2.14),

$$r = \left( \frac{p_\theta^2}{mk} \right) \frac{1}{(1 + e \cos(\theta - g))}.$$

E temos,

$e = 0$   $r$  é um círculo

$e = 1$   $r$  é uma parábola

$e > 1$   $r$  é uma hipérbole

$e < 1$   $r$  é uma elipse

Feito isso, resolvemos o sistema (2.13).

Portanto, o *problema de Kepler* é integrável.

## 2.5.2 Caso a ser estudado

Voltando ao caso da seção anterior, com

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{\|\mathbf{P}\|^2}{2 \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)} + V(\|\mathbf{Q}\|),$$

temos que a equação

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = J_0 \nabla \tilde{H}$$

descreve a dinâmica de um problema de Kepler com um corpo de massa  $m_1+m_2$  fixo na origem, e outro de massa  $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$  se deslocando.

Passando às coordenadas polares

$$r = \|\mathbf{Q}\|$$

$$\theta = \text{arctg} \left( \frac{Q_2}{Q_1} \right),$$

onde  $Q_i$  e  $P_i$  são as coordenadas, no plano onde ocorre a dinâmica, de  $Q$  e  $P$  respectivamente,  $i = 1, 2$ .

Fazendo uma transformação canônica de coordenadas, temos que os momentos associados são

$$p_r = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{r}$$

$$p_\theta = P_2Q_1 - P_1Q_2.$$

Sendo assim, o novo hamiltoniano e suas equações são

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2M} + \frac{p_\theta^2}{2Mr^2} + V(r),$$

onde  $M = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$  e

$$\dot{r} = \frac{p_r}{M} \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{Mr^3} - \frac{dV}{dr}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{Mr^2} \quad \dot{p}_\theta = 0$$

Portanto a solução se dá como anteriormente.

## 2.6 Estudo do potencial

Nessa seção, vamos estudar o comportamento do potencial, e como ele interfere na dinâmica, mais precisamente, nas órbitas.

Pela seção anterior, temos que o hamiltoniano do sistema, após a redução de dimensão, é dado pela equação

$$H(r, \theta, p_r; p_\theta) = \frac{p_r^2}{2M} + \frac{p_\theta^2}{2Mr^2} + V(r)$$

onde  $p_\theta$  é constante. Como estamos considerando o plano imerso em  $\mathbb{R}^3$ , o potencial é dado por  $V(r) = -\frac{k}{r}$ ,  $k > 0$ .

### 2.6.1 O Potencial Efetivo

**Definição 2.6.1.** Defina  $V_{ef}(r) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)$  o **potencial efetivo** do sistema (2.13) e hamiltoniano (2.12)

Sendo  $H$  uma integral de movimento que representa a *energia total* do sistema, passaremos a denotá-lo por  $\mathbf{E}$ . Portanto, temos a seguinte equação:

$$\mathbf{E} = \frac{p_r^2}{2M} + V_{ef}(r) \quad (2.17)$$

Para estudarmos o  $V_{ef}$  de forma simplificada, escrevemos  $a = \frac{p_\theta^2}{2M}$ , notando que  $a > 0$ ,

$$V_{ef} = \frac{a}{r^2} - \frac{k}{r}$$

**Observação.** O nomeclatura *potencial efetivo* faz sentido, pois observando a equação (2.17) vemos que a energia é equivalente ao de uma partícula de massa  $M$ , de movimento unidimensional e com energia portencial igual a  $V_{ef}$ .

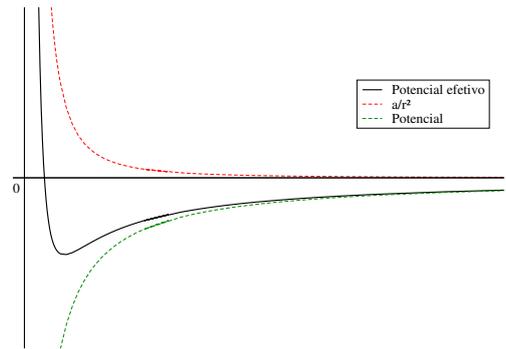


Figura 2.2: Potencial Efetivo Gravitacional,  $V_{ef} = \frac{a}{r^2} - \frac{k}{r}$ ,  $a = \frac{1}{2}$  e  $k = 3$

Vemos na figura 2.2 o comportamento do potencial efetivo.

**Observação.** Na figura 2.3 apresentamos o gráfico no caso do potencial efetivo elétrico, percebemos a diferença de comportamento devido a troca de sinal, isto é, enquanto o potencial gravitacional é negativo, o potencial elétrico é positivo.

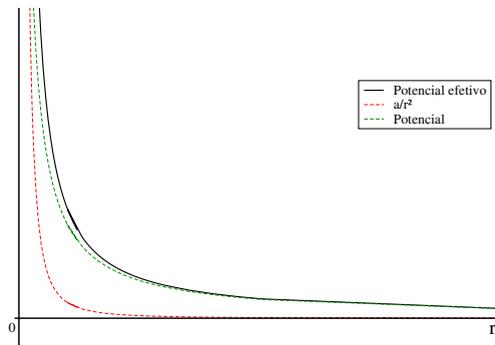


Figura 2.3: Potencial Efetivo Elétrico,  $V_{ef} = \frac{a}{r^2} + \frac{k}{r}$ ,  $a = \frac{1}{2}$  e  $k = 3$

Estudemos algumas propriedades de  $V_{ef} = \frac{a}{r^2} - \frac{k}{r}$  que independem dos valores de  $a$ ,  $k$  (exceto do fato de que são positivos). Estas propriedades serão úteis para a seção seguinte.

**Afirmção 1.**  $V_{ef}$  tem um único zero.

*Demonstração.* De fato,  $V_{ef} = 0$  se, e somente se  $\frac{a}{r^2} - \frac{k}{r} = 0$ . Portanto,

devemos ter  $a - kr = 0$ . Logo,  $V_{ef}$  se anula apenas para  $r = \frac{a}{k}$ .  $\square$

**Afirmção 2.**  $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef} = \infty$  e  $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef} = 0$

*Demonstração.* Trivial  $\square$

**Afirmção 3.**  $V_{ef}$  sempre tem um mínimo em  $r = \frac{2a}{k}$  e é único.

*Demonstração.* De fato, sendo  $V_{ef} = \frac{a}{r^2} - \frac{k}{r}$ . Temos  $\frac{dV_{ef}}{dr} = \frac{-2a}{r^3} + \frac{k}{r^2}$ . Logo,  $\frac{dV_{ef}}{dr} = 0$  se, e somente se  $\frac{-2a + kr}{r^3} = 0$ , ou seja,  $-2a + kr = 0$ . Então  $r = \frac{2a}{k}$  é o único ponto crítico.

Utilizando o “critério da segunda derivada”, tendo  $\frac{d^2V_{ef}}{dr^2} = \frac{6a}{r^4} - \frac{2k}{r^3}$ , e  $\frac{d^2V_{ef}}{dr^2}|_{r=\frac{2a}{k}} = \frac{k^4}{(2a)^3} > 0$ ,  $r = \frac{2a}{k}$  é ponto de mínimo local. Pelas propriedades da Afirmção 2, e  $\frac{2a}{k} > \frac{a}{k}$  (logo  $V_{ef}(\frac{2a}{k}) < 0$ ),  $r = \frac{2a}{k}$  é o único ponto de mínimo global.  $\square$

Portanto a figura 2.2 representa qualitativamente nosso potencial, independentemente de  $a$  e  $k$ .

### 2.6.2 Estudo qualitativo das órbitas

Agora faremos uma sobreposição dos gráficos dos níveis de energia com o do potencial efetivo para fazer uma estudo qualitativo das órbitas. Mostraremos que sempre temos órbitas circulares e órbitas limitadas, porém também existirão órbitas ilimitadas.

Mas antes de tudo vamos definir dois tipos de órbitas que aparecerão.

**Definição 2.6.2.** *Uma partícula tem uma órbita **fechada** se para  $\phi(t, x)$ , o fluxo que descreve a órbita da partícula, existe  $\tau > 0$  tal que*

$$\phi(t, x) = \phi(t + \tau, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Ou seja, a órbita é periódica.*

Por exemplo é fácil perceber que uma órbita circular satisfaz a definição acima.

**Definição 2.6.3.** *Um órbita é dita **limitada** se existem dois círculos de raios  $r_1$  e  $r_2$  de forma que a órbita fica confinada entre esses dois círculos. Se temos  $r_1 < r_2$ , dizemos que  $r_1$  é o **pericentro** e  $r_2$  o **apocentro**.*

Portanto, agora estamos pronto para classificar as órbitas. Lembremos que, pela equação (2.17), tem-se

$$\frac{p_r^2}{2M} = \mathbf{E} - V_{ef}(r)$$

Uma das consequências dessa equação é que só ocorre dinâmica quando  $\mathbf{E} - V_{ef}(r) \geq 0$ . Vamos separar em três casos onde ocorre dinâmica:

#### **Primeiro caso - órbita ilimitada**

Neste caso consideramos energias  $\mathbf{E} \geq 0$ . Para tais valores, seu gráfico intersecta apenas uma vez o gráfico do potencial efetivo. No ponto de intersecção o corpo está em repouso, logo após esse ponto, os gráficos se distanciam, indicando um aumento de velocidade da partícula. Onde o potencial efetivo tem seu ponto de mínimo é quando a partícula atinge sua velocidade máxima. Depois sua velocidade se estabiliza, porém ela continua se afastando. Então, para esses valores de energia temos órbita ilimitada! Veja figura 2.4.

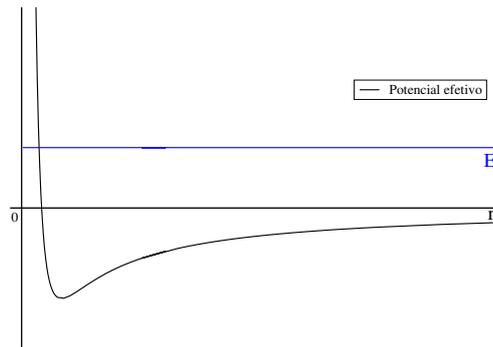


Figura 2.4: Órbitas ilimitadas

### Segundo caso - órbita limitada

Agora, analisaremos quando  $\mathbf{E} \in (V_{ef}(\frac{2a}{k}), 0)$ . Aqui, temos que seu gráfico intersecta duas vezes o gráfico do potencial efetivo. Portanto, a órbita fica confinada pelas barreiras de potencial definidas pelos pontos de intersecção. Daí concluímos que a órbita partícula é limitada. Veja figura 2.5.

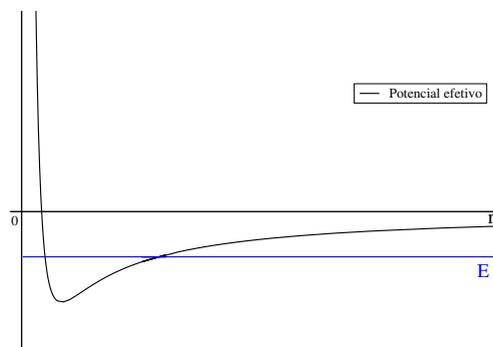


Figura 2.5: Órbitas limitadas

### Terceiro caso - órbita circular

No último, nos resta analisar quando  $\mathbf{E} = V_{ef}(\frac{2a}{k})$ . Os gráficos se intersectam apenas nesse ponto. Portanto, a órbita da partícula fica restrita ao raio de  $\frac{2a}{k}$ , logo a órbita é circular. Veja figura 2.6

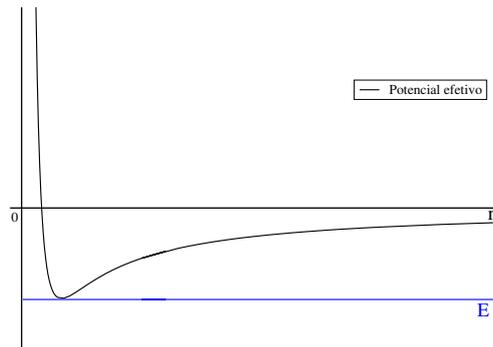


Figura 2.6: Órbita circular

A princípio, o terceiro caso é o único para o qual podemos garantir que possui órbita *fechada*, no segundo caso, apenas garantimos que são limitadas! Porém, temos pelo **Teorema de Bertrand** que para esse potencial ( $V \sim \frac{1}{r}$ ) todas as órbitas limitadas são fechadas! Isso não ocorrerá para o caso em que  $V \sim \log(r)$  como fazemos no capítulo 3.

**Teorema 15. (Teorema de Bertrand)** *As únicas forças centrais que resultam em órbitas fechadas para todas as órbitas limitadas são as forças geradas pelos potenciais  $V \sim \frac{1}{r}$  e  $V \sim r^2$ .*

## 2.7 O vetor de Laplace-Runge-Lenz

Aqui vamos considerar a dinâmica do problema de Kepler e vamos evidenciar integrais de movimentos escondidas, as coordenadas do *vetor de Laplace-Runge-Lenz*. Feito isso, vamos mostrar as relações de independência entre as integrais que tínhamos, a saber, o hamiltoniano e o momento angular. Toda essa seção se baseia em Alemi[1] e [15].

### 2.7.1 O vetor

Relembrando o *problema de Kepler*, estamos considerando a dinâmica entre dois corpos de massa, um de massa  $M$ , corpo tal que vamos considerar fixo na origem, e outro corpo de massa  $m$  orbitando o corpo de massa  $M$ . Como estudado anteriormente temos que essa dinâmica é descrita pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial V(\|\mathbf{q}\|)}{\partial \mathbf{q}}\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  são a posição e o momento de corpo de massa  $m$  e

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} + V(\mathbf{q}).$$

Para simplificar as contas, vamos considerar os vetores  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  no plano XY. Observe que podemos fazer isso já que, como vimos anteriormente, a dinâmica fica restrita a um plano. Porém as definições a seguir independe dessa escolha.

Primeiro definimos o *momento angular*.

**Definição 2.7.1.** *O vetor*

$$\mathbf{L} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$$

*o vetor de momento angular*

**Definição 2.7.2.** *Chamaremos por vetor de Laplace-Runge-Lenz o vetor definido por*

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}},$$

onde  $k$  é uma constante caracterizando o potencial e  $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$ .

Como dissemos anteriormente, buscamos as coordenadas desse vetor, portanto agora iremos nessa direção. Note que, utilizando nossa definição para  $\mathbf{L}$ , podemos escrever

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}) - mk \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}.$$

Utilizando a *Fórmula de Lagrange*<sup>1</sup>,

$$\mathbf{A} = \mathbf{q} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) - mk \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$$

. Sendo  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, 0)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, 0)$ , obtemos

$$\mathbf{A} = \left( p_2 (p_2 q_1 - p_1 q_2) - mk \frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|}, p_1 (q_2 p_1 - p_2 q_1) - mk \frac{q_2}{\|\mathbf{q}\|}, 0 \right). \quad (2.18)$$

Fazendo a mudança de coordenadas como anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} r &= \|\mathbf{q}\| & p_r &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{r}, \\ \theta &= \arctg \left( \frac{q_2}{q_1} \right) & p_\theta &= p_2 q_1 - p_1 q_2 \end{aligned},$$

Sendo  $\frac{q_1}{r} = \cos\theta$ ,  $\frac{q_2}{r} = \sen\theta$ , temos

$$p_1 = p_r \cos\theta - p_\theta \frac{\sen\theta}{r}$$

e

$$p_2 = p_r \sen\theta + p_\theta \frac{\cos\theta}{r}.$$

Substituindo em (2.18) temos:

$$\mathbf{A} = \left( \sen\theta p_r p_\theta + \frac{\cos\theta}{r} p_\theta^2 - mk \cos\theta, -\cos\theta p_r p_\theta + \frac{\sen\theta}{r} p_\theta^2 - mk \sen\theta, 0 \right)$$

### 2.7.2 Interpretação geométrica do vetor L-R-L

Na figura 2.7 está representado o Vetor L-R-L em posições diferentes das órbitas. Vamos estudar algumas propriedades geométricas do vetor. Primeiro

<sup>1</sup>A *Fórmula de Lagrange* no diz que dados  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  tem se:  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$

o fato que ele é ortogonal ao vetor de momento angular. De fato isso é imediato de

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \cdot (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}) = 0$$

Segundo, podemos descrever a órbita em função do módulo de vetor  $\mathbf{A}$ . Note que a direção do vetor L-R-L está fixada, denotemos por  $\theta$  o ângulo entre o vetor  $\mathbf{q}$  e esta direção. Temos que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = \text{Arcos}(\theta), \quad (2.19)$$

onde  $\|\mathbf{A}\| = A$  e  $\|\mathbf{q}\| = r$ . Por outro lado, utilizando definição de  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}) \cdot \mathbf{q} - mk \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \cdot \mathbf{q} \quad (2.20)$$

$$= \mathbf{L} \cdot (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}) - mkr \quad (2.21)$$

$$= l^2 - mkr, \quad (2.22)$$

onde  $l$  é a norma do vetor de momento angular. Pelas equações (2.19) e (2.22),

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left( 1 + \frac{A}{mk} \cos\theta \right).$$

Portanto, o formato da órbita e sua simetria de fato tem uma ligação com o vetor de Laplace-Runge-Lenz. De acordo com [15], a existência do vetor L-R-L é suficiente para indicar que as órbitas são fechadas.

### 2.7.3 As coordenadas do vetor L-R-L como integrais de movimento

Então, mostraremos que as coordenadas não nulas do vetor L-R-L são integrais de movimento. Para isso utilizaremos o teorema 12, que diz que  $f$  é uma

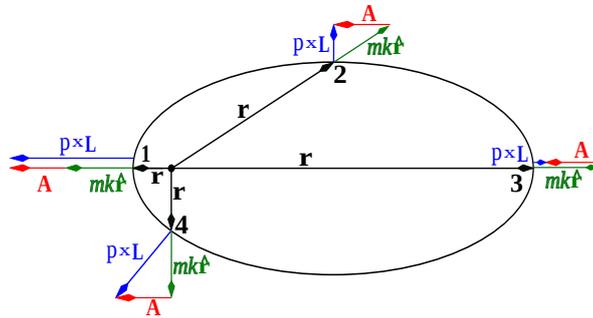


Figura 2.7: Vetor de Laplace-Runge-Lenz

quantidade conservada, se e somente se  $\{f, H\} = 0$ . Denotemos

$$I_1 = \text{sen}\theta p_r p_\theta + \frac{\cos\theta}{r} p_\theta^2 - mk \cos\theta$$

e

$$I_2 = -\cos\theta p_r p_\theta + \frac{\text{sen}\theta}{r} p_\theta^2 - mk \text{sen}\theta.$$

Considerando o colchete de Poisson  $\{, \}$  definido no espaço de fase  $(r, \theta, p_r, p_\theta)$ , vamos provar a seguinte afirmação:

**Afirmação.**  $\{I_i, H\} = 0$ , para  $i = 1, 2$ , ou seja,  $I_1$  e  $I_2$  são integrais primeira.

*Demonstração.* Faremos para  $I_1$ , para  $I_2$  é completamente análogo. Sabemos que

$$\{H, I_1\} = \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial I_1}{\partial p_r} - \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{\partial I_1}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial I_1}{\partial p_\theta} - \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \frac{\partial I_1}{\partial \theta}$$

Portanto, sendo

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

depois da mudança de coordenadas e

$$I_1 = \text{sen}\theta p_r p_\theta + \frac{\cos\theta}{r} p_\theta^2 - mk \cos\theta$$

tem-se

$$\begin{aligned} \{H, I_1\} = & \left( \frac{-p_\theta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} \right) (p_\theta \text{sen}\theta) - \frac{p_r}{m} \left( \frac{-p_\theta^2 \cos\theta}{r^2} \right) \\ & - \frac{p_\theta}{mr^2} \left( p_r p_\theta \cos\theta - \frac{p_\theta^2 \text{sen}\theta}{r} + mk \text{sen}\theta \right) \end{aligned}$$

É imediato que  $\{H, I_1\} = 0$ , pela antissimetria do colchete de Poisson,  $\{I_1, H\} = 0$ ,  $I_1$  é uma integral primeira.  $\square$

Agora temos 4 integrais primeiras,  $H, p_\theta, I_1$  e  $I_2$ , nos resta mostrar que pelo menos 3 delas são independentes. Feito isso, temos que o nosso sistema é integrável.

#### 2.7.4 Independência entre as integrais

Duas integrais primeiras  $W_1$  e  $W_2$  são linearmente independentes, se os vetores  $\nabla W_1$  e  $\nabla W_2$  são linearmente independentes.

Afirmamos que  $H, p_\theta, I_i$  são linearmente independentes  $i = 1, 2$ . Novamente, fazemos para  $i = 1$ , para  $i = 2$  é inteiramente analogo. Temos que

$$\nabla H(\theta, r, p_\theta, p_r) = \left( 0, -\frac{p_\theta^2}{mr^2} + V'(r), \frac{p_\theta}{mr^2}, \frac{p_r}{m} \right)$$

$$\nabla p_\theta = (0, 0, 1, 0)$$

$$\nabla I_1 = \left( p_r p_\theta \cos\theta - p_\theta^2 \frac{\text{sen}\theta}{r} + mk \text{sen}\theta, -p_\theta^2 \frac{\cos\theta}{r^2}, p_r \text{sen}\theta + p_\theta \frac{2\cos\theta}{r}, p_\theta \text{sen}\theta \right)$$

Note que se

$$p_r p_\theta \cos\theta - p_\theta^2 \frac{\text{sen}\theta}{r} + mk \text{sen}\theta \neq 0,$$

$\nabla I_1$  não pode ser escrito como combinação linear dos outros dois vetores. De fato, identificando com polinômio em  $p_\theta$  e  $p_r$ ,

$$p_r p_\theta \cos\theta - p_\theta^2 \frac{\text{sen}\theta}{r} + m k \text{sen}\theta = 0$$

se  $\cos\theta = 0$ ,  $\frac{\text{sen}\theta}{r} = 0$  e  $m k \text{sen}\theta = 0$ . Absurdo pois teríamos  $\cos\theta = \text{sen}\theta = 0$ ! Como os vetores são dois a dois linearmente independentes, temos que os três de fato são LI, portanto as integrais primeiras são independentes.

Então, encontramos 3 integrais primeiras para um sistema de 4 graus de liberdade, concluímos que nosso problema é integrável.

# Capítulo 3

## O problema dos dois corpos na geometria intrínseca do plano

### 3.1 Plano como espaço ambiente

Vamos primeiro fazer uma abordagem algébrica do sistema acima, mostrando a solução de forma implícita e depois de maneira mais analítica, faremos um estudos do gráfico e de seu plano de fase.

Considerando a equação (2.17) , tem-se

$$\begin{aligned}\frac{p_r^2}{2M} &= E - V_{ef}(r) \\ \Rightarrow p_r &= \pm [2M (E - V_{ef}(r))]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Logo, como  $\dot{r} = \frac{p_r}{M}$ , de (3.1),

$$\dot{r} = \pm \frac{[2M (E - V_{ef}(r))]^{\frac{1}{2}}}{M}$$

Observe que  $r = \pm \frac{[2M(E-V_{ef}(r))]^{\frac{1}{2}}}{M}$  são contínuas em  $(0, \infty)$ . Definindo  $f(r) = \frac{[2M(E-V_{ef}(r))]^{\frac{1}{2}}}{M}$  (a escolha do sinal foi arbitrária), obtemos uma equação diferencial ordinária autônoma, a saber

$$\dot{r} = f(r)$$

Dada uma certa condição inicial, pelo teorema de Peano para EDO's, garantimos uma solução em um intervalo.

Portanto, onde a solução  $r(t)$  está bem definida, diretamente das equações do sistema (2.17) obtém-se  $\theta(t) = \int \frac{p_\theta}{Mr^2} dt$  e  $p_r = Mf(r)$ .

### 3.2 Estudo do potencial

Faremos agora a mesma análise que fizemos na seção 2.6 do capítulo 2. E usaremos os resultados obtidos lá, para compararmos a ação dos dois potenciais. Relembrando, temos o hamiltoniano

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2M} + \frac{p_\theta^2}{2Mr^2} + V(r),$$

onde  $V(r) = k \log(r)$ , veja seção 1.5,  $k > 0$  já que agora estamos trabalhando na geometria intrínseca do plano. Com o sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{M} & \dot{p}_r &= \frac{p_\theta^2}{Mr^3} - \frac{dV}{dr} \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{Mr^2} & \dot{p}_\theta &= 0. \end{aligned}$$

Note que  $p_\theta$  é constante.

### 3.2.1 O Pontencial Efetivo

Utilizando a **definição 2.6.1**, temos que agora o *potencial efetivo* é dado por

$$V_{ef}(r) = \frac{p_\theta^2}{2Mr^2} + k \log(r)$$

Podemos reformular o sistema de equações da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{M} & \dot{p}_r &= -\frac{dV_{ef}}{dr} \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{Mr^2} & \dot{p}_\theta &= 0, \end{aligned}$$

e o hamiltoniano

$$H(r, p_r; p_\theta) = \frac{p_r^2}{2M} + V_{ef}(r).$$

Dadas condições iniciais para as equações acima,  $r(0) = r_0$ ,  $p_r = p_{r0}$  e  $\theta(0) = \theta_0$ , temos que  $H$  sendo uma integral de movimento, é uma constante na solução de tal sistema. Denotemos  $H(r, p_r; r_0, \theta_0, p_{r0}, p_\theta) = \mathbf{E}(r, p_r; p_\theta)$ .

$$\mathbf{E}(r, p_r; p_\theta) = \mathbf{E} = \frac{p_r^2}{2M} + V_{ef}. \quad (3.2)$$

Voltando nossa atenção para o potencial, vamos escreve-lo de forma mais simples, para melhor tratamento qualitativo.

$$V_{ef} = \frac{a}{r^2} + k \log(r)$$

Veja na figura 3.1 um exemplo do comportamento do potencial efetivo gravitacional.

**Observação** Assim como feito no capítulo 2 quando estudamos o potencial efetivo, mostramos o exemplo no caso elétrico para compararmos a diferença

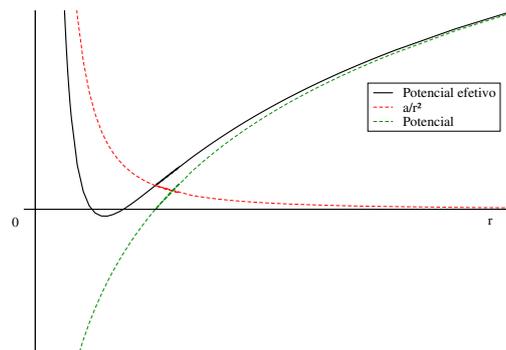


Figura 3.1: Potencial Efetivo Gravitacional,  $a = \frac{1}{2}$  e  $k = 3$

entre o caso atrativo (gravitacional,  $V_{ef} = \frac{a}{r^2} + k \log(r)$ ) e o repulsivo (elétrico,  $V_{ef} = \frac{a}{r^2} - k \log(r)$ ). Ver figura 3.2.

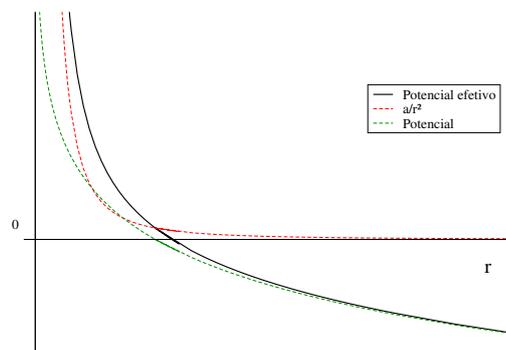


Figura 3.2: Potencial Efetivo Elétrico,  $a = \frac{1}{2}$  e  $k = 3$

**Observação.** Agora vamos aproveitar o momento para comparar a diferença entre os potenciais efetivos considerados neste capítulo e no anterior no caso atrativo (gravitacional) e no caso repulsivo. Os valores de  $a$  e  $k$  são os mesmos que usados anteriormente. Ver figura 3.3.

Vamos mostrar duas propriedades gerais (independente dos valores de  $a$  e  $k$ ) do potencial efetivo que estamos considerando. Elas serão úteis na próxima seção quando estudarmos as órbitas.

**Afirmção 1.**  $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef} = \infty$  e  $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef} = \infty$

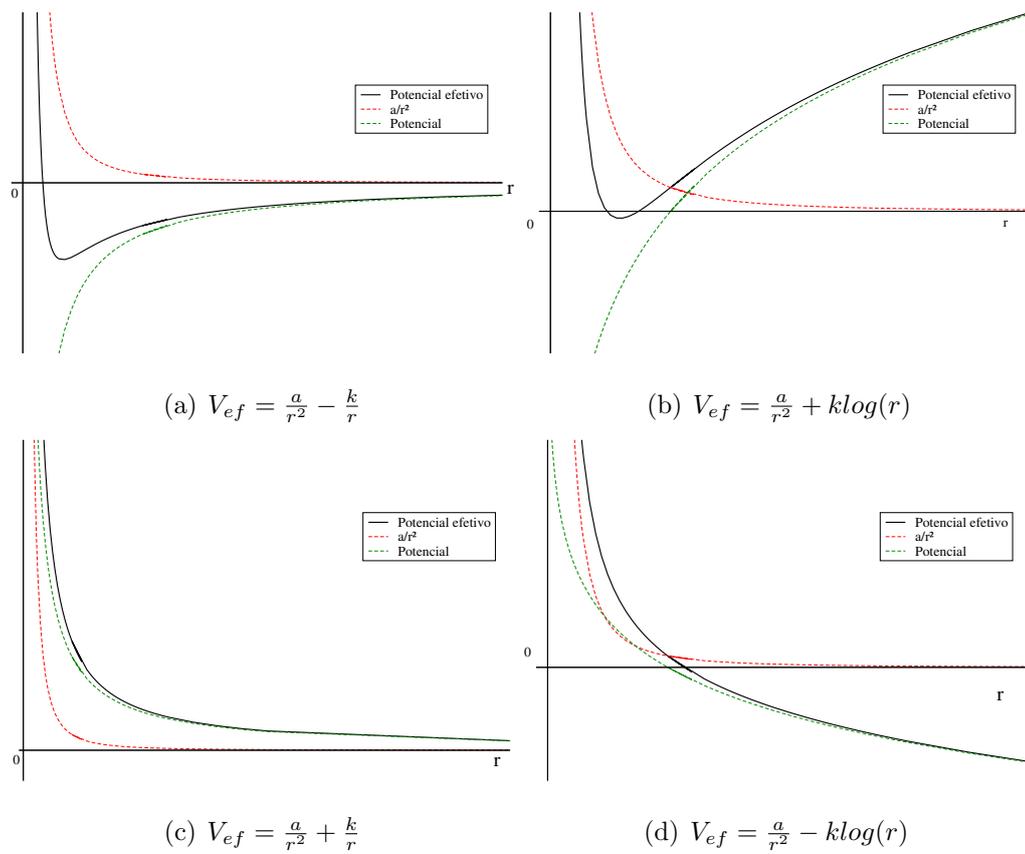


Figura 3.3: (a)  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  e (b)  $\mathbb{R}^2$  Caso gravitacional, (c)  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  e (d)  $\mathbb{R}^2$  Caso elétrico

*Demonstração.* Trivial. □

**Afirmção 2.**  $V_{ef}$  tem um único ponto de mínimo, em  $r = \sqrt{\frac{2a}{b}}$

*Demonstração.*  $V_{ef} = \frac{a}{r^2} + k \log(r)$ , vamos procurar seus pontos críticos. Temos

$$\frac{d}{dr} V_{ef} = \frac{-2a + kr^2}{r^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} V_{ef} = 0 &\iff -2a + kr^2 \\ &\Rightarrow r = \sqrt{\frac{2a}{k}} \end{aligned}$$

Portanto,  $r = \sqrt{\frac{2a}{k}}$  é o único ponto crítico para  $V_{ef}$ . Agora usando o *critério da segunda derivada* vamos constatar que é um ponto de mínimo.

De fato, sendo a segunda derivada

$$\frac{d^2}{dr^2}V_{ef} = \frac{6a - kr^2}{r^4}$$

Temos  $\frac{d^2}{dr^2}V_{ef}|_{r=\sqrt{\frac{2a}{k}}} = \frac{k^2}{a} > 0$ . Logo,  $r = \sqrt{\frac{2a}{k}}$  é um ponto de mínimo local, é único ponto crítico. Como os limites vão para infinito quando  $r$  tende para os extremos do domínio de  $V_{ef}$ ,  $r = \sqrt{\frac{2a}{k}}$  é mínimo.  $\square$

### 3.2.2 Estudo qualitativo das órbitas

Utilizando a equação da energia (3.2) fazemos o estudo qualitativo das órbitas. Veremos que para esse potencial não existe órbita ilimitada.

#### Primeiro caso - órbita limitada

Se considerarmos  $\mathbf{E} \in (V_{ef}(\sqrt{\frac{2a}{k}}), \infty)$ , pela propriedade de que  $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef} = \infty$  e  $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef} = \infty$  garantimos que existem  $r_1$  e  $r_2$  tais que  $\mathbf{E} - V_{ef} = 0$  nesses pontos (são os pontos de intersecção entre os gráficos das funções na figura 3.4). Portanto a órbita da partícula fica confinada entre os círculos de raio  $r_1$  e  $r_2$ , ou seja é uma órbita limitada.

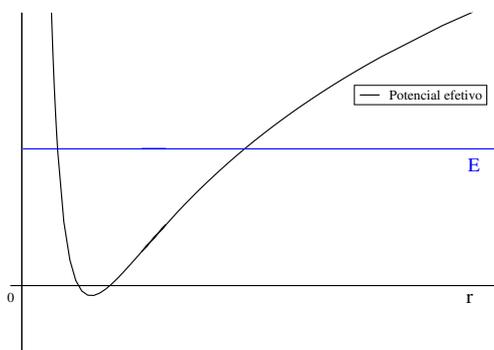


Figura 3.4: Órbita limitada

### Segundo caso - órbita circular

Considerando  $\mathbf{E} = V_{ef} \left( \sqrt{\frac{2a}{k}} \right)$ , como  $V_{ef} \left( \sqrt{\frac{2a}{k}} \right)$  é o valor mínimo de  $V_{ef}$ , os gráficos se intersectam somente uma vez, e portanto a órbita se mantém sempre a uma distância de  $r = \sqrt{\frac{2a}{k}}$ . Portanto a órbita é circular! Veja figura 3.5.

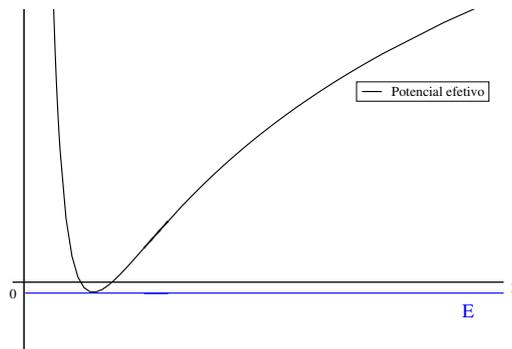


Figura 3.5: Órbita circular

Note que se  $\mathbf{E} \in (-\infty, V_{ef} \left( \sqrt{\frac{2a}{k}} \right))$ , teríamos  $\mathbf{E} - V_{ef} < 0$  para todo  $r \in (0, \infty)$ , portanto

$$\frac{p_r^2}{2M} < 0,$$

absurdo!. Ou seja, nesse caso não ocorre interação! Sendo assim os únicos casos possíveis são os casos acima relatados, então podemos concluir que para o potencial  $V(r) = k \log(r)$  todas as órbitas são limitadas!

Na próxima seção provaremos que nenhuma dessas órbitas é uma elipse com a origem em um dos focos, lembrando que para o potencial  $\frac{1}{r}$  obtemos que todas as órbitas limitadas tem essa forma (*Primeira lei de Kepler*), e mais, que para órbitas próximas à órbita circular nenhuma órbita é fechada.

### 3.3 O Potencial $\log(r)$ e as órbitas fechadas

Primeiro focaremos nas órbitas elípticas, pela importância das *leis de Kepler*, e depois generalizamos, no sentido de nenhuma órbita ser fechada, para órbitas próximas a órbita circular.

#### 3.3.1 O potencial $\log(r)$ não gera órbitas elípticas

Provemos então que utilizando o potencial  $\log(r)$  não teremos nenhuma órbita que respeita a *primeira lei de Kepler*. Segue a proposição:

**Proposição 3.3.1.** *Considerando o Hamiltoniano*

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + k\log(r) \quad (3.3)$$

$k > 0$ , com as equações

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r} \quad (3.4)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad \dot{p}_\theta = 0. \quad (3.5)$$

Então, nenhuma das órbitas é uma elipse com a origem em um dos focos, fora da órbita circular.

**Observação:** Note que pelas equações acima, é imediato que  $p_\theta$  é constante.

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que exista tal órbita. Nesse caso ela pode ser parametrizada como

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta)}, \quad (3.6)$$

onde  $a$  é o maior semi-eixo da elipse e  $e$  é a excentricidade ( $0 < e < 1$ ). Da parametrização acima temos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

De (3.6),  $\frac{dr}{d\theta} = \frac{a(1-e^2)esen(\theta)}{(1+ecos(\theta))^2}$ , já pelas equações do sistema,  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{mr^2}$ . Portanto,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a(1-e^2)esen(\theta)p_\theta}{(1+ecos(\theta))^2 mr^2}$$

Substituindo (3.6) na equação acima,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{a(1-e^2)esen(\theta)p_\theta (1+ecos(\theta))^2}{(1+ecos(\theta))^2 ma^2 (1-e^2)^2} \\ &= \frac{esen(\theta)p_\theta}{ma(1-e^2)} \end{aligned}$$

Por outro, olhando para as equações do sistema,  $\frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{m}$ . Igualando as duas equações podemos concluir que

$$p_r = \frac{esen(\theta)p_\theta}{a(1-e^2)}.$$

Dessa equação temos que

$$\dot{p}_r = \frac{ecos(\theta)p_\theta}{a(1-e^2)} \frac{d\theta}{dt} = \frac{ecos(\theta)p_\theta^2}{ma(1-e^2)r^2}$$

Note que, novamente pelas equações do sistema, temos  $\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r}$ . Igualemos essas duas equações e temos

$$\frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r} = \frac{ecos(\theta)p_\theta^2}{ma(1-e^2)r^2}$$

Após manipulação e usando (3.6), temos

$$p_\theta^2 + p_\theta^2 ecos(\theta) = ma^2(1-e^2)^2 k$$

Então,

$$\cos(\theta) = \frac{ma^2(1 - e^2)^2k - p_\theta^2}{ep_\theta^2}$$

Porém, o lado direito da equação é constante, mas  $\cos(\theta)$  com  $\theta$  indo de 0 a  $2\pi$  não o é! Absurdo! Chegamos assim a nossa contradição. Portanto, não existe a órbita elítica com a origem em um dos focos.  $\square$

### 3.3.2 O Potencial $k\log(r)$ não gera órbitas fechadas

Considerando órbitas geradas pelo potencial  $k\log(r)$  com  $r$  próximo a  $r_0$  (ponto de mínimo de  $V_{ef}$ ), provamos pela proposição a seguir, que tais órbitas não são fechadas.

**Proposição 3.3.2.** *Seja um sistema com o Hamiltoniano (3.3) com as equações (3.4) e (3.5). Temos que as órbitas próximas à órbita circular não são fechadas.*

*Demonstração.* Fixando um nível de energia, de forma que

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)$$

Usando a notação do potencial efetivo,

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + V_{ef}(r)$$

Temos que  $p_\theta$  é constante como foi observado anteriormente. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{p_r^2}{2m} &= E - V_{ef}(r) \\ \Rightarrow p_r &= \pm \sqrt{2m(E - V_{ef}(r))}. \end{aligned}$$

Faremos as contas para o sinal positivo.

Pelas equações do sistema,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{2m(E - V_{ef}(r))}}{m} \quad (3.7)$$

$$\Rightarrow dr = \frac{\sqrt{2m(E - V_{ef}(r))}}{m} dt. \quad (3.8)$$

Por outro lado,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{p_\theta}{mr^2} dt. \quad (3.10)$$

Juntando as equações (3.8) e (3.10),

$$d\theta = \frac{p_\theta}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{ef}(r))}} dr.$$

Então,

$$\theta(r) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{p_\theta}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{ef}(r))}} dr,$$

Sendo a órbita limitada, existem  $r_{min}$  (pericentro) e  $r_{max}$  (apocentro), e definimos

$$\Phi(r) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{p_\theta}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{ef}(r))}} dr, \quad (3.11)$$

o ângulo entre o pericentro e apocentro.

Defina  $x = \frac{p_\theta}{r}$ , então fazendo a mudança de variável em (3.11),

$$\Phi(x) = \int_{x_{max}}^{x_{min}} \frac{-dx}{\sqrt{2m(E - \frac{x^2}{2m} - V(x))}} \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - W(x))}}, \quad (3.13)$$

onde  $W(x) = \frac{x^2}{2m} + V(\frac{p_\theta}{x})$ .

Agora considere uma dinâmica dada pelo Hamiltoniano,

$$\tilde{H}(x, p) = \frac{p^2}{2} + W(x), \quad (3.14)$$

com as equações

$$\dot{x} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = p \quad (3.15)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = -W'(x). \quad (3.16)$$

Observe que essa é uma dinâmica unidimensional. Fixada uma energia  $E$  para o sistema, pela equação do Hamiltoniano (3.14),

$$p = \sqrt{2(E - W)}.$$

Já pela equação (3.15),

$$\frac{dx}{p} = dt.$$

Portanto,

$$t_2 - t_1 = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - W(x))}}$$

Considerando as órbitas fechadas, temos que o período  $T$  de uma órbita é o menor tempo para que saia de  $x_{min}$  e retorne, assim

$$T = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - W)}}. \quad (3.17)$$

Substituindo a equação (3.13) na equação acima, obtemos

$$\frac{T}{2\sqrt{m}} = \Phi(r) \quad (3.18)$$

.

Note que se  $r_0$  é ponto de mínimo de  $V_{ef}$ , então  $x_0 = \frac{p\theta}{r_0}$  é ponto de mínimo para  $W$ .

Agora iremos caminhar na seguinte direção, queremos calcular  $\Phi$  para valores próximos a  $r_0$ , para isso, calcularemos  $T$  para oscilações próximas a  $x_0$ .

Primeiro passo, considere uma aproximação em série de Taylor de segunda ordem para  $W$  em torno de  $x_0$ ,

$$W(x) = W(x_0) + (x - x_0)W'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}W''(x_0) + o(x - x_0)$$

Desprezando o erro  $o(x - x_0)$ , observando que  $W'(x_0) = 0$  já que  $x_0$  é seu ponto de mínimo e denotando por  $E_0 = W(x_0) = V_{ef}(r_0)$ , temos

$$W(x) = E_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2}W''(x_0). \quad (3.19)$$

Substituindo em (3.17),

$$T = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - E_0 - \frac{(x-x_0)^2}{2}W''(x_0))}}.$$

Após manipulação algébrica,

$$T = \frac{2}{\sqrt{W''(x_0)}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E-E_0)}{W''(x_0)} - (x-x_0)^2}}.$$

Resolvendo a integral,

$$T = \frac{2}{\sqrt{W''(x_0)}} \left( \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{x_{max} - x_0}{\sqrt{\frac{2(E-E_0)}{W''(x_0)}}} \right) - \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{x_{min} - x_0}{\sqrt{\frac{2(E-E_0)}{W''(x_0)}}} \right) \right). \quad (3.20)$$

Da equação (3.19) podemos escrever  $x - x_0$  como

$$x - x_0 = \pm \sqrt{\frac{2(W(x) - E_0)}{W''(x_0)}}$$

Observando que  $E = W(x_{max}) = W(x_{min})$ , obtemos

$$x_{max} - x_0 = \sqrt{\frac{2(E - E_0)}{W''(x_0)}}$$

$$x_{min} - x_0 = -\sqrt{\frac{2(E - E_0)}{W''(x_0)}}$$

Substituindo os valores encontrado acima em (3.20),

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2}{\sqrt{W''(x_0)}} (\text{sen}^{-1}(1) - \text{sen}^{-1}(-1)) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{W''(x_0)}} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{W''(x_0)}}
 \end{aligned}$$

O período encontrado acima é o período para órbitas fechadas que ficam próximas de  $x_0$ . Logo, o ângulo  $\Phi$  para órbitas próximas a órbita circular, a partir da equação (3.18), é

$$\Phi(r) = \frac{\pi}{\sqrt{m} \sqrt{W''(x_0)}}. \quad (3.21)$$

Como  $W(x) = V_{ef}(r)$  temos,

$$\begin{aligned}
 W'(x) &= \frac{dV_{ef}}{dr} \frac{dr}{dx} = -\frac{p_\theta}{x^2} \frac{dV_{ef}}{dr} \\
 W''(x) &= \frac{2p_\theta}{x^3} \frac{dV_{ef}}{dr} + \left( \frac{p_\theta^2}{x^4} \right) \frac{d^2V_{ef}}{dr^2}
 \end{aligned}$$

Avaliando a segunda derivada no seu ponto de mínimo  $x_0 = \frac{p_\theta}{r_0}$ ,

$$\begin{aligned}
 W''(x_0) &= \frac{2p_\theta}{x_0^3} \frac{dV_{ef}}{dr} \Big|_{r=r_0} + \frac{p_\theta^2}{x_0^4} \frac{d^2V_{ef}}{dr^2} \Big|_{r=r_0} \\
 &= \frac{r_0^4}{p_\theta^2} V_{ef}''(r_0).
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor encontrado acima na equação (3.21),

$$\Phi(r) = \frac{\pi p_\theta}{\sqrt{m} r_0^2 \sqrt{V_{ef}''(r_0)}}. \quad (3.22)$$

Lembrando que

$$V_{ef}(r) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r),$$

temos

$$V_{ef}''(r) = \frac{3p_\theta^2}{mr^4} + V''(r).$$

Além disso, sendo  $r_0$  ponto de mínimo de  $V_{ef}$ ,  $V_{ef}'(r_0) = \frac{p_\theta^2}{mr_0^3}$ , temos

$$V_{ef}''(r_0) = \frac{3V'(r_0) + r_0V''(r_0)}{r_0}.$$

Substituindo na equação (3.22),

$$\Phi(r) = \frac{\pi}{r_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{m} \sqrt{3V'(r_0) + r_0V''(r_0)}} \quad (3.23)$$

$$= \pi \sqrt{\frac{V'(r_0)}{3V'(r_0) + r_0V''(r_0)}}. \quad (3.24)$$

Temos que o ângulo entre o pericentro e o apocentro de tais órbitas para órbitas próximas a órbita circular é dada pela equação (3.24).

Utilizando que  $V(r) = k \log(r)$ , então

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \pi \sqrt{\frac{\frac{k}{r_0}}{\frac{3k}{r_0} - \frac{r_0 k}{r_0^2}}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Como  $\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , a órbita não é periódica. □

# Capítulo 4

## O Problema dos dois corpos no cilindro

### 4.1 O cilindro

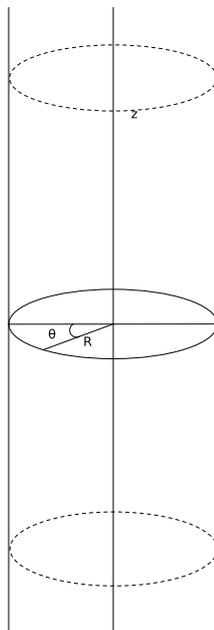


Figura 4.1: Cilindro de raio  $R$

Considere um cilindro reto de raio  $R$ , temos que uma parametrização é dada

por

$$\begin{aligned}\mathbf{X} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{X}(z, \theta) &= (R \cos(\theta), R \sin(\theta), z)\end{aligned}$$

A métrica é dada por

$$ds^2 = dz^2 + R^2 d\theta^2,$$

que pode ser representada pela matriz

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}.$$

## 4.2 O sistema

Sejam duas partículas no cilindro que se atraem simultaneamente através da força gravitacional. Denotemos por  $\mathbf{q}_i = (z_i, \theta_i)$  a posição e  $\mathbf{p}_i = (p_{z_i}, p_{\theta_i})$  o momento da partícula de massa  $m_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Temos que o Hamiltoniano é dado por,

$$H(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\|\mathbf{p}_1\|_{g^{-1}}^2}{2m_1} + \frac{\|\mathbf{p}_2\|_{g^{-1}}^2}{2m_2} + U(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \quad (4.1)$$

e o sistema de equações que descrevem o sistema é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_i &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} H \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} H.\end{aligned}$$

Note que

$$\|\mathbf{p}_i\|_{g^{-1}}^2 = (p_{z_i}, p_{\theta_i}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{bmatrix} (p_{z_i}, p_{\theta_i})^T.$$

Como consequência, temos que o Hamiltoniano  $H$  pode ser escrito como

$$H = \frac{p_{z_1}^2}{2m_1} + \frac{p_{\theta_1}^2}{2m_1R^2} + \frac{p_{z_2}^2}{2m_2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2m_2R^2} + V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2).$$

### 4.3 O Potencial

Vamos utilizar a semelhança da equação para a função “Stream” dos vórtices e a equação do potencial para o nosso caso, e usar o resultado de [5] para encontrar nosso potencial no cilindro. Para mais informações veja a referência citada.

$$V(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2) = 2m_1m_2 \log \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) + \text{senh}^2 \left( \frac{z_1 - z_2}{2R} \right) \right]$$

### 4.4 As equações

Após ter encontrado a energia potencial estudada na seção acima podemos avançar no estudo das equações do sistema. Portanto o Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{p_{z_1}^2}{2m_1} + \frac{p_{\theta_1}^2}{2m_1R^2} + \frac{p_{z_2}^2}{2m_2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2m_2R^2} + 2m_1m_2 \log \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) + \text{senh}^2 \left( \frac{z_1 - z_2}{2R} \right) \right],$$

e as equações são dadas por,

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \frac{p_{\theta_i}}{m_i R^2} & \dot{p}_{\theta_i} &= -\frac{\partial V}{\partial \theta_i} \\ \dot{z}_i &= \frac{p_{z_i}}{m_i} & \dot{p}_{z_i} &= -\frac{\partial V}{\partial z_i}. \end{aligned}$$

Na próxima seção vamos provar que que  $p_{\theta_1} + p_{\theta_2}$  e  $p_{z_1} + p_{z_2}$  são integrais de movimento. Esses são os momentos totais do sistema em relação às coordena-

das  $\theta$  e  $z$  respectivamente. Isso se dá pelo fato de que se girarmos o sistema em relação a um ângulo ou transladarmos em relação ao eixo  $z$  não interferimos no sistema.

## 4.5 Integrais de movimento

Vamos mostrar que, além do próprio  $H$ , o sistema tem como integrais  $p_{\theta_1} + p_{\theta_2}$  e  $p_{z_1} + p_{z_2}$ , ou seja  $\{p_{\theta_1} + p_{\theta_2}, H\} = 0$  e  $\{p_{z_1} + p_{z_2}, H\} = 0$ .

### 4.5.1 $p_{z_1} + p_{z_2}$ como integral de movimento

Temos por definição que

$$\begin{aligned} \{p_{z_1} + p_{z_2}, H\} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (p_{z_1} + p_{z_2})}{\partial \theta_i} \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_i}} - \frac{\partial (p_{z_1} + p_{z_2})}{\partial p_{\theta_i}} \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \\ &+ \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (p_{z_1} + p_{z_2})}{\partial z_i} \frac{\partial H}{\partial p_{z_i}} - \frac{\partial (p_{z_1} + p_{z_2})}{\partial p_{z_i}} \frac{\partial H}{\partial z_i} \end{aligned}$$

É imediato que  $\frac{\partial (p_{z_1} + p_{z_2})}{\partial \theta_i} = \frac{\partial (p_{z_1} + p_{z_2})}{\partial p_{\theta_i}} = \frac{\partial (p_{z_1} + p_{z_2})}{\partial z_i} = 0$ , e  $\frac{\partial (p_{z_1} + p_{z_2})}{\partial z_i} = 1$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Portanto,

$$\{p_{z_1} + p_{z_2}, H\} = -\frac{\partial H}{\partial z_1} - \frac{\partial H}{\partial z_2}.$$

Como a parte cinética do Hamiltoniano não depende de  $z_1$  e  $z_2$  tem-se

$$\{p_{z_1} + p_{z_2}, H\} = -\frac{\partial V}{\partial z_1} - \frac{\partial V}{\partial z_2}. \quad (4.2)$$

Lembrando que

$$V(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2) = 2m_1m_2 \log \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) + \text{senh}^2 \left( \frac{z_1 - z_2}{2R} \right) \right],$$

temos que

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} = 4m_1m_2 \left[ \frac{\text{senh} \left( \frac{z_1 - z_2}{2R} \right) \cosh \left( \frac{z_1 - z_2}{2R} \right)}{\text{sen}^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) + \text{senh}^2 \left( \frac{z_1 - z_2}{2R} \right)} \right] \frac{\partial}{\partial z_i} \left( \frac{z_1 - z_2}{2R} \right).$$

Com isso concluimos que

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = - \frac{\partial V}{\partial z_2}.$$

Então, substituindo na equação (4.2) temos

$$\{p_{z_1} + p_{z_2}, H\} = 0.$$

Provamos então que  $p_{z_1} + p_{z_2}$  é uma integral de movimento.

#### 4.5.2 $p_{\theta_1} + p_{\theta_2}$ como integral de movimento

Novamente, por definição

$$\begin{aligned} \{p_{\theta_1} + p_{\theta_2}, H\} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (p_{\theta_1} + p_{\theta_2})}{\partial \theta_i} \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_i}} - \frac{\partial (p_{\theta_1} + p_{\theta_2})}{\partial p_{\theta_i}} \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \\ &+ \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (p_{\theta_1} + p_{\theta_2})}{\partial z_i} \frac{\partial H}{\partial p_{z_i}} - \frac{\partial (p_{\theta_1} + p_{\theta_2})}{\partial p_{z_i}} \frac{\partial H}{\partial z_i}, \end{aligned}$$

que, como no caso anterior, pode ser reduzido a

$$\{p_{\theta_1} + p_{\theta_2}, H\} = - \frac{\partial V}{\partial \theta_1} - \frac{\partial V}{\partial \theta_2}. \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_i} = 4m_1m_2 \left[ \frac{\text{sen} \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)}{\text{sen}^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) + \text{senh}^2 \left( \frac{z_1 - z_2}{2R} \right)} \right] \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right).$$

Portanto,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_2}$$

Substituindo a igualdade acima em (4.3) concluímos

$$\{p_{\theta_1} + p_{\theta_2}, H\} = 0$$

Portanto,  $p_{\theta_1} + p_{\theta_2}$  é uma integral primeira.

Agora faremos a redução de dimensão utilizando essas duas integrais. Observe que será análogo ao feito no plano.

## 4.6 Redução

Vamos utilizar as duas integrais encontradas acima para reduzir os graus de liberdade do sistema. Inspirados no que foi feito ao caso plano, fazemos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 \quad \bar{\mathbf{Q}} = \frac{m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2}{m_1 + m_2},$$

que tem como momentos conjugados respectivamente

$$\mathbf{P} = \frac{m_1 \mathbf{p}_2 - m_2 \mathbf{p}_1}{m_1 + m_2} \quad \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

Em coordenadas os quatros vetores acima são:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= (z_2 - z_1, \theta_2 - \theta_1) \\ \bar{\mathbf{Q}} &= \left( \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2} \right) \\ \mathbf{P} &= \left( \frac{m_1 p_{z_2} - m_2 p_{z_1}}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 p_{\theta_2} - m_2 p_{\theta_1}}{m_1 + m_2} \right) \\ \bar{\mathbf{P}} &= (p_{z_1} + p_{z_2}, p_{\theta_1} + p_{\theta_2})\end{aligned}$$

Substituindo na equação (4.1) temos

$$H = \frac{\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{g}^{-1}}^2}{2 \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)} + \frac{\|\bar{\mathbf{P}}\|_{\mathbf{g}^{-1}}^2}{2(m_1 + m_2)} + V(\mathbf{Q})$$

Com as equações,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} H & \dot{\bar{\mathbf{P}}} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} V \\ \dot{\bar{\mathbf{Q}}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{P}}} H & \dot{\mathbf{P}} &= 0.\end{aligned}$$

Note que  $\bar{\mathbf{P}}$  é constante, e portanto  $\frac{\|\bar{\mathbf{P}}\|_{\mathbf{g}^{-1}}^2}{2(m_1 + m_2)}$  é constante, e vamos denotá-lo como  $C(\bar{\mathbf{P}})$ . Substituindo na equação do Hamiltoniano, tem-se

$$H = \frac{\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{g}^{-1}}^2}{2 \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)} + C(\bar{\mathbf{P}}) + V(\mathbf{Q})$$

Ou seja

$$\tilde{H} = \frac{\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{g}^{-1}}^2}{2 \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)} + V(\mathbf{Q}).$$

# Capítulo 5

## O Problema dos dois corpos na esfera

Agora vamos estudar o problema dos dois corpos na esfera. Como antes primeiro falaremos um pouco da estrutura do espaço, depois do potencial e da equações de movimento sobre ela.

### 5.1 A esfera

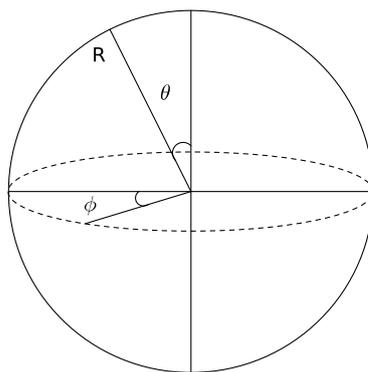


Figura 5.1: Esfera de raio  $R$

Uma parametrização da esfera é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\mapsto (R\cos(\phi)\text{sen}(\theta), R\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta), R\cos(\theta)), \end{aligned}$$

onde  $R$  é o raio da esfera.

A métrica é dada por

$$ds^2 = R^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 + R^2 d\theta^2.$$

Neste caso, podemos definir a matriz que representa a métrica como

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} R^2 \text{sen}^2(\theta) & 0 \\ 0 & R^2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

## 5.2 O sistema

Considere duas partículas sobre a esfera acima interagindo através da força gravitacional. Considere  $\mathbf{q}_i = (\phi_i, \theta_i)$  a posição da  $i$ -ésima partícula e  $\mathbf{p}_i = (p_{\phi_i}, p_{\theta_i})$  o seu momento,  $i \in \{1, 2\}$ . Temos que o Hamiltoniano é dado por

$$H(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\|\mathbf{p}_1\|_{\mathbf{g}^{-1}}^2}{2m_1} + \frac{\|\mathbf{p}_2\|_{\mathbf{g}^{-1}}^2}{2m_2} + V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2).$$

Ou equivalentemente,

$$H = \frac{p_{\phi_1}^2}{2m_1 R^2 \text{sen}^2(\theta_1)} + \frac{p_{\theta_1}^2}{2m_1 R^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{2m_2 R^2 \text{sen}^2(\theta_2)} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2m_2 R^2} + V(\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2), \quad (5.1)$$

e as equações são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_i &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i},\end{aligned}$$

para  $i \in \{1, 2\}$

### 5.3 O potencial

Como no caso do cilindro, usamos o resultado para vórtices encontrado em [5] para o cálculo do nosso potencial. Seguindo as idéias do artigo citado, temos o potencial dado por:

$$V(\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{m_1 m_2}{2\pi} \log(1 - \cos(\rho_{12}))$$

onde

$$\cos(\rho_{12}) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\phi_2 - \phi_1)$$

### 5.4 As equações

Podemos escrever as equações do sistema, usando o potencial acima, de maneira mais explícita da seguinte forma:

Sendo o Hamiltoniano,

$$H = \frac{p_{\phi_1}^2}{2m_1 R^2 \sin^2(\theta_1)} + \frac{p_{\theta_1}^2}{2m_1 R^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{2m_2 R^2 \sin^2(\theta_2)} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2m_2 R^2} + \frac{m_1 m_2}{2\pi} \log(1 - \cos(\rho_{12})), \quad (5.2)$$

as equações são

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_i &= \frac{p_{\phi_i}}{m_i R^2 \text{sen}^2(\theta_i)} & p_{\phi_i} &= -\frac{\partial V}{\partial \phi_i} \\ \dot{\theta}_i &= \frac{p_{\theta_i}}{m_i R^2} & p_{\theta_i} &= \frac{p_{\phi_i}^2 \cos(\theta_i)}{m_i R^2 \text{sen}^3(\theta_i)} - \frac{\partial V}{\partial \theta_i},\end{aligned}$$

para  $i \in \{1, 2\}$ .

## 5.5 Integrais de movimento

Nesta seção verificamos que  $p_{\phi_1} + p_{\phi_2}$  é uma integral de movimento, ou seja  $\{p_{\phi_1} + p_{\phi_2}, H\} = 0$ . Isso se dá pelo fato de podermos transladar o sistema por um ângulo no eixo de  $\phi$  e o sistema se manter o mesmo.

### 5.5.1 $p_{\phi_1} + p_{\phi_2}$ como integral de movimento.

Vamos provar que  $\{p_{\phi_1} + p_{\phi_2}, H\} = 0$ . Por definição temos,

$$\begin{aligned}\{p_{\phi_1} + p_{\phi_2}, H\} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (p_{\phi_1} + p_{\phi_2})}{\partial \theta_i} \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_i}} - \frac{\partial (p_{\phi_1} + p_{\phi_2})}{\partial p_{\theta_i}} \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \\ &+ \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (p_{\phi_1} + p_{\phi_2})}{\partial \phi_i} \frac{\partial H}{\partial p_{\phi_i}} - \frac{\partial (p_{\phi_1} + p_{\phi_2})}{\partial p_{\phi_i}} \frac{\partial H}{\partial \phi_i}.\end{aligned}$$

É fácil ver que

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial (p_{\phi_1} + p_{\phi_2})}{\partial \theta_i} \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_i}} - \frac{\partial (p_{\phi_1} + p_{\phi_2})}{\partial p_{\theta_i}} \frac{\partial H}{\partial \theta_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (p_{\phi_1} + p_{\phi_2})}{\partial \phi_i} \frac{\partial H}{\partial p_{\phi_i}} = 0,$$

e que

$$\frac{\partial (p_{\phi_1} + p_{\phi_2})}{\partial p_{\phi_i}} = 1.$$

Portanto,

$$\{p_{\phi_1} + p_{\phi_2}, H\} = -\frac{\partial H}{\partial \phi_1} - \frac{\partial H}{\partial \phi_2}.$$

Pela equação (5.1) temos que a parte cinética do hamiltoniano  $H$  não depende de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , portanto, a igualdade acima pode ser reduzida em

$$\{p_{\phi_1} + p_{\phi_2}, H\} = -\frac{\partial V}{\partial \phi_1} - \frac{\partial V}{\partial \phi_2}.$$

Lembrando que

$$V(\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{m_1 m_2}{2\pi} \log(1 - \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)\cos(\phi_2 - \phi_1)), \quad (5.3)$$

temos

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = \frac{m_1 m_2 \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)\text{sen}(\phi_2 - \phi_1)}{2\pi(1 - \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)\cos(\phi_2 - \phi_1))} \frac{\partial}{\partial \phi_i}(\phi_2 - \phi_1).$$

Do feito acima, obtemos  $\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = -\frac{\partial V}{\partial \phi_2}$ . Substituindo em (5.3), concluimos que

$$\{p_{\phi_1} + p_{\phi_2}, H\} = 0.$$

## 5.6 Redução

Vamos utilizar o fato de que  $p_{\phi_1} + p_{\phi_2}$  é uma integral de movimento para diminuirmos a dimensão do nosso sistema. Fazemos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (\phi_2 - \phi_1, \theta_2 - \theta_1) \\ \bar{\mathbf{Q}} &= \left( \frac{m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2} \right). \end{aligned}$$

Teremos como momento conjugado, respectivamente

$$\mathbf{P} = \left( \frac{m_1 p_{\phi_2} - m_2 p_{\phi_1}}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 p_{\theta_2} - m_2 p_{\theta_1}}{m_1 + m_2} \right)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = (p_{\phi_1} + p_{\phi_2}, p_{\theta_1} + p_{\theta_2}).$$

Substituindo em (5.2) e usando o potencial dado em (5.3), temos o hamiltoniano representado como

$$H = \frac{P_1^2}{2R^2} \left( \frac{m_2 \text{sen}\theta_2 + m_1 \text{sen}\theta_1}{m_1 m_2 \text{sen}\theta_2 \text{sen}\theta_1} \right) + \frac{\bar{P}_1^2}{2R^2 M} \left( \frac{m_1 \text{sen}\theta_2 + m_2 \text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2} \right)$$

$$+ \frac{\bar{P}_2^2}{2R^2 M} + \frac{P_2^2}{2R^2} \left( \frac{M}{m_1 m_2} \right) + \frac{\bar{P}_1 P_1}{M} \left( \frac{\text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2} \right)$$

$$+ V(Q_1, Q_2, \bar{Q}_2).$$

# Capítulo 6

## Uma métrica massificada e o processo de redução

### 6.1 Plano

Vamos denotar o plano estudado no capítulo 2 como  $\Pi$ . Novamente considerando o dois corpos se deslocando no plano pela iteração de uma força gravitacional. Diferente do feito no capítulo 3.

#### 6.1.1 As coordenadas

Cosiderando dois corpos de posição  $\mathbf{q}_1 = (x_1, y_1)$  e  $\mathbf{q}_2 = (x_2, y_2)$  de massa respectivamente  $m_1$  e  $m_2$ .

A métrica em  $\Pi$  é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Com  $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  representando a métrica euclidiana. Porém podemos mudar o ponto de vista desse problema notando que  $\mathbf{q} = (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \Pi \times \Pi$ . Nesse

caso, a métrica da variedade produto é dada por:

$$ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dx_2^2 + dy_2^2$$

Temos assim que a matriz  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & 0 \\ 0 & \mathbf{g} \end{bmatrix}$  representa a métrica acima.

Os momentos conjugados de  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$ ,  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2 \in T^*\Pi$ , serão vistos como  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in T^*(\Pi \times \Pi)$ .

O Hamiltoniano anteriormente foi abordado como uma função  $H : T^*\Pi \times T^*\Pi \rightarrow \mathbb{R}$ . Nessa mudança de abordagem, teremos  $H : T^*(\Pi \times \Pi) \rightarrow \mathbb{R}$ . Vejamos como se faz essa mudança. Temos que o Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{g}^{-1} \mathbf{p}_1^T}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2 \mathbf{g}^{-1} \mathbf{p}_2^T}{2m_2} + V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

Definindo a matriz  $M = \begin{bmatrix} m_1 \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & m_2 \mathbb{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$ , podemos reescrever o Hamiltoniano como

$$\begin{aligned} H &= \frac{(M^{-1} \mathbf{p}^T)^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{p}^T}{2} + V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{\mathbf{p}^T (M^{-1})^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{p}^T}{2} + V(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

Usando o fato de que  $M^{-1}$  é uma matriz simétrica e a propriedade de produto de matrizes inversas,

$$H = \frac{\mathbf{p}^T (\mathbf{G}M)^{-1} \mathbf{p}^T}{2} + V(\mathbf{q})$$

Notemos agora que podemos considerar uma métrica massificada para variedade produto  $\Pi \times \Pi$ ,

$$ds_m^2 = m_1 dx_1^2 + m_1 dy_1^2 + m_2 dx_2^2 + m_2 dy_2^2$$

Denotando  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}M$  a matriz que representa essa nova métrica. Pelo feito acima, podemos escrever o Hamiltoniano, como segue

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mathbf{p}^T (\tilde{\mathbf{G}}^{-1})^T \mathbf{p}^T}{2} + V(\mathbf{q}) \\ &= \frac{\|\mathbf{p}\|_{\tilde{\mathbf{G}}^{-1}}^2}{2} + V(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

onde  $V(\mathbf{q}) = \left(\frac{m_1 m_2}{2\pi}\right) \log(\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|)$  e as equações são

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$$

Na próxima seção veremos como se dá o mesmo processo de redução de dimensão do sistema feito no capítulo 2 utilizando esse ponto de vista.

**Observação 1.** A partir desse ponto de vista, o sistema de  $n$  massas (no nosso caso  $n = 2$ ) é visto como um ponto na nova variedade, a variedade produto. Isso elimina o problema de definir o centro de massa, pois nos casos do cilindro e da esfera, como veremos adiante, o centro de massa não está, necessariamente, nas superfícies onde ocorre a dinâmica.

**Observação 2.** Chamaremos o par  $(\Pi \times \Pi, ds_m)$  de *plano massificado*.

### 6.1.2 Redução

Defina a nova coordenada por

$$\mathbf{Q} = \left( x_2 - x_1, y_2 - y_1, \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \right)_1.$$

---

<sup>1</sup>O momento conjugado para a coordenada  $\mathbf{Q}$  será  $\mathbf{P} = \left( \frac{m_1 p_{x_2} - m_2 p_{x_1}}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 p_{y_2} - m_2 p_{y_1}}{m_1 + m_2}, p_{x_1} + p_{x_2}, p_{y_1} + p_{y_2} \right)$

Segue que  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$

$$\begin{aligned}x_1 &= Q_3 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} Q_1 \\y_1 &= Q_4 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} Q_2 \\x_2 &= Q_3 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} Q_1 \\y_2 &= Q_4 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} Q_2.\end{aligned}$$

A métrica massificada nessas novas coordenadas é

$$ds_m^2 = \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) dQ_1^2 + \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) dQ_2^2 + (m_1 + m_2) dQ_3^2 + (m_1 + m_2) dQ_4^2$$

A equação do Hamiltoniano nas novas coordenadas

$$H = \frac{\|\mathbf{P}\|_{\tilde{\mathbf{G}}^{-1}(M_1)}^2}{2} + V(Q_1, Q_2).$$

Portanto, temos duas coordenadas cíclicas.

Continuando a redução, fazemos as novas coordenadas

$$\bar{\mathbf{Q}} = \left( \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}, \operatorname{arctg} \left( \frac{Q_2}{Q_1} \right), Q_3, Q_4 \right)^2,$$

onde denotaremos  $r = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$  e  $\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{Q_2}{Q_1} \right)$ .

**Observação:** *Note que, na verdade, estamos usando as coordenadas polares como segue*

$$x_2 - x_1 = r \cos(\theta) \quad y_2 - y_1 = r \sin(\theta)$$

$r \in (0, \infty)$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

---

<sup>2</sup>O momento conjugado a  $\bar{\mathbf{Q}}$  é  $\bar{\mathbf{P}} = \left( \frac{P_{Q_1} Q_1}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}} + \frac{P_{Q_2} Q_2}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}, -P_{Q_1} Q_2 + P_{Q_2} Q_1, P_{Q_3}, P_{Q_4} \right)$ .

A métrica nessa nova coordenada é

$$ds_m^2 = \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) dr^2 + \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) r^2 d\theta^2 + (m_1 + m_2) dQ_3^2 + (m_1 + m_2) dQ_4^2.$$

Definimos a matriz  $\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{g} \end{bmatrix}$ . Então  $\tilde{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{G}_1 M_1$  é a matriz que representa essa métrica.

Como consequência temos que o Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{\|\bar{\mathbf{P}}\|_{\tilde{\mathbf{G}}_1^{-1}}^2}{2} + V(r).$$

Então, após essa redução encontramos três coordenadas cíclicas!

## 6.2 Cilindro

Note que se denotarmos o cilindro por  $C$ , temos que o Hamiltoniano considerado no capítulo 4 é uma função  $H : T^*C \times T^*C \rightarrow \mathbb{R}$ , agora vamos ver o que resultaria uma abordagem diferente, isto é, enxergarmos o Hamiltoniano como  $H : T^*(C \times C) \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 6.2.1 As coordenadas

A princípio, tínhamos as coordenadas da duas partículas dadas por  $\mathbf{q}_i = (z_i, \theta_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Definimos a coordenada em  $C \times C$  como

$$\mathbf{Q} = (z_1, \theta_1, z_2, \theta_2).$$

A métrica usual em  $C \times C$  é

$$ds^2 = dz_1^2 + R^2 d\theta_1^2 + dz_2^2 + R^2 d\theta_2^2$$

Essa métrica pode ser representada pela matriz  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & 0 \\ 0 & \mathbf{g} \end{bmatrix}$ , lembrando

que no capítulo 4 consideramos  $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$ .

A partir de agora passamos a considerar a métrica massificada dada por

$$ds_m^2 = m_1 dz_1^2 + m_1 R^2 d\theta_1^2 + m_2 dz_2^2 + m_2 R^2 d\theta_2^2,$$

sendo essa métrica massificada representa pela matriz  $\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{g} & 0 \\ 0 & m_2 \mathbf{g} \end{bmatrix}$ .

Utilizando essa nova métrica, a equação do Hamiltoniano é

$$H = \frac{1}{2} \|\mathbf{P}\|_{\tilde{\mathbf{G}}^{-1}}^2 + V(\mathbf{Q}),$$

onde

$$V(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2) = 2m_1 m_2 \log \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) + \text{senh}^2 \left( \frac{z_1 - z_2}{2R} \right) \right]. \quad (6.1)$$

Na próxima seção faremos a redução que fizemos na seção 4.6 usando a variedade produto massificada.

### 6.2.2 Redução

Como primeiro passo de redução, fazemos a mudança de coordenadas como anteriormente. Ou seja, definimos

$$\bar{\mathbf{Q}} = \left( z_2 - z_1, \theta_2 - \theta_1, \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2} \right)^3.$$

---

<sup>3</sup>Temos como momento conjugado o vetor  $\bar{\mathbf{P}} = \left( \frac{m_1 p_{z_2} - m_2 p_{z_1}}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 p_{\theta_2} - m_2 p_{\theta_1}}{m_1 + m_2}, p_{z_1} + p_{z_2}, p_{\theta_1} + p_{\theta_2} \right)$

Segue que

$$\begin{aligned} z_1 &= \bar{Q}_3 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{Q}_1 \\ z_2 &= \bar{Q}_3 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{Q}_1 \\ \theta_1 &= \bar{Q}_4 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{Q}_2 \\ \theta_2 &= \bar{Q}_4 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{Q}_2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$ds_m^2 = \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) d\bar{Q}_1^2 + \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) R^2 d\bar{Q}_2^2 + (m_1 + m_2) d\bar{Q}_3^2 + (m_1 + m_2) R^2 d\bar{Q}_4^2,$$

onde denotamos por  $\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{g} & 0 \\ 0 & (m_1 + m_2) \mathbf{g} \end{bmatrix}$  a matriz que representa a métrica acima.

Note que pela equação (6.1), temos que  $V$  depende apenas das coordenadas  $\bar{Q}_1$  e  $\bar{Q}_2$ . Assim, o Hamiltoniano nessa nova coordenada é

$$H = \frac{\|\bar{\mathbf{P}}\|_{\bar{\mathbf{G}}^{-1}}^2}{2} + V(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2).$$

Temos que  $\bar{Q}_3$  e  $\bar{Q}_4$  são coordenadas cíclicas.

### 6.3 Esfera

Como acima, mudaremos a abordagem feita anteriormente. Denote por  $S$  a esfera de raio  $R$ . Nessa seção vamos parametrizar o problema dos dois corpos como uma partícula em  $S \times S$ . Nessa abordagem o Hamiltoniano é uma função

$$H : T^*(S \times S) \rightarrow \mathbb{R}.$$

### 6.3.1 As coordenadas

Lembrando que anteriormente denotamos por  $\mathbf{q}_i = (\phi_i, \theta_i)$  a posição da  $i$ -ésima partícula,  $\phi_i \in [0, 2\pi)$  e  $\theta_i \in [0, \pi)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Vamos denotar

$$\mathbf{Q} = (\phi_1, \theta_1, \phi_2, \theta_2).$$

A métrica em  $S \times S$  é dada por

$$ds^2 = R^2 \text{sen}^2(\theta_1) d\phi_1^2 + R^2 d\theta_1^2 + R^2 \text{sen}^2(\theta_2) d\phi_2^2 + R^2 d\theta_2^2.$$

Sendo  $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} R^2 \text{sen}^2(\theta) & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$ , a matriz que representa essa métrica é  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & 0 \\ 0 & \mathbf{g} \end{bmatrix}$ .

Porém, como feito anteriormente, vamos considerar uma métrica massificada,

$$ds_m^2 = m_1 R^2 \text{sen}^2(\theta_1) d\phi_1^2 + m_1 R^2 d\theta_1^2 + m_2 R^2 \text{sen}^2(\theta_2) d\phi_2^2 + m_2 R^2 d\theta_2^2.$$

Denotamos por  $\tilde{\mathbf{G}}$  a matriz  $\begin{bmatrix} m_1 \mathbf{g} & 0 \\ 0 & m_2 \mathbf{g} \end{bmatrix}$  que representa a métrica  $ds_m$ . Temos assim que o Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{P} (\tilde{\mathbf{G}}^{-1}) \mathbf{P}^T + V(\mathbf{Q}).$$

Então, reescrevemos o hamiltoniano como

$$H = \frac{\|\mathbf{P}\|_{\tilde{\mathbf{G}}^{-1}}^2}{2} + V(\mathbf{Q}),$$

onde

$$V(\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{m_1 m_2}{2\pi} \log(1 - \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \cos(\phi_2 - \phi_1)).$$

Agora faremos a redução como foi feita na seção 5.6, utilizando a métrica massificada.

### 6.3.2 Redução

Fazemos a seguinte mudança de coordenada

$$\bar{\mathbf{Q}} = (\phi_2 - \phi_1, \theta_1, \phi_2, \theta_2)^4$$

Denotaremos, para facilitar a leitura e melhor entendimento do leitor,  $\bar{\phi} = \phi_2 - \phi_1$ . Nessa coordenada a métrica massificada resulta em

$$\begin{aligned} ds_m^2 = & m_1 \text{sen}^2(\theta_1) R^2 d\bar{\phi}^2 + m_1 R^2 d\theta_1^2 + (m_1 \text{sen}^2(\theta_1) R^2 + m_2 \text{sen}^2(\theta_2) R^2) d\phi_2^2 \\ & + m_2 R^2 d\theta_2^2 - 2m_1 \text{sen}^2(\theta_2) R^2 d\bar{\phi} d\phi_2 \end{aligned}$$

A matriz que representa a métrica  $ds_m$  é

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} m_1 R^2 \text{sen}^2(\theta_1) & 0 & -m_1 R^2 \text{sen}^2(\theta_1) & 0 \\ 0 & m_1 R^2 & 0 & 0 \\ -m_1 R^2 \text{sen}^2(\theta_1) & 0 & m_1 R^2 \text{sen}^2(\theta_1) + m_2 R^2 \text{sen}^2(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 R^2 \end{bmatrix}.$$

Temos que o Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{\|\bar{\mathbf{P}}\|_{\mathbf{G}_1^{-1}}^2}{2} + V(\bar{\phi}, \theta_1, \theta_2),$$

com o potencial sendo,

$$V(\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{m_1 m_2}{2\pi} \log(1 - \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \cos(\bar{\phi})).$$

---

<sup>4</sup>Temos que o momento conjugado é dado por

$$\bar{\mathbf{P}} = (-p_{\phi_1}, p_{\theta_1}, p_{\phi_1} + p_{\phi_2}, p_{\theta_2}).$$

Note que com essa mudança de variável ganhamos um variável cíclica, a saber  $\phi_2$ .

# Capítulo 7

## Uma generalização do Teorema de Bertrand

Neste capítulo estudaremos uma generalização do Teorema de Bertrand para superfícies de revolução de curvatura gaussiana constante. Mais especificamente, vamos estudar a generalização feita por Santoprete em [25].

### 7.1 A Superfície

Consideremos uma curva regular simples e planar, dada por

$$\begin{aligned}\gamma &: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ r &\longmapsto (f(u), 0, g(u)),\end{aligned}$$

com  $\gamma \in C^1$  e vamos supor que  $\gamma'(u) \neq 0$ , e que  $f(u) > 0$  no interior de  $I$ . Observamos que a curva está no plano XZ.

Agora vamos considerar a superfície gerada pela rotação da curva  $\gamma$  em

torno do  $z$ . Temos que essa superfície pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &: I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, \phi) &\longmapsto \mathbf{X}(u, \phi) = (f(u)\cos(\phi), f(u)\sin(\phi), g(u)) \end{aligned}$$

Repare que não estamos considerando as possíveis singularidades nos extremos.

Definimos as seguintes classificações para esse tipo de superfície:

- i) Se  $I = [c, d]$ , e  $f(c) = f(d) = 0$ , a superfície é uma *superfície esférica de revolução*.
- ii) Se  $I = (c, d)$  e  $-\infty \leq c, d \leq \infty$  é uma *superfície hiperboloidal de revolução*.
- iii) Se  $I = [c, d]$ ,  $\gamma(c) = \gamma(d)$  com  $f(c) = f(d) > 0$ ,  $\gamma$  é um loop fechado e a superfície é uma *superfície toroidal de revolução*.
- iv) Se  $I = [c, d]$ ,  $\infty < c < d \leq \infty$  e  $f(c) = 0$ , então é uma *superfície paraboloidal de revolução*.

Temos que a métrica da superfície de revolução é dada por

$$ds^2 = Edu^2 + Gd\phi^2, \quad (7.1)$$

onde  $E = f'(u)^2 + g'(u)^2$  e  $G = f(u)^2$  são os coeficientes da primeira forma fundamental.

No que segue vamos considerar  $E = 1$ , pois consideramos a curva parametrizada pelo comprimento de arco.

Além disso temos que a curvatura gaussiana é dada por

$$K = -\frac{f''}{f},$$

lembrando que estamos considerando  $K$  constante e positiva.

## 7.2 Ajustes de Coordenadas

Temos como objetivo descrever a dinâmica restrita a essa superfície. E desejamos fazer isso pela formulação hamiltoniana. Mas para isso, precisamos considerar o sistema nas variáveis corretas. Faremos como segue:

Denotando por  $K_c$  a energia cinética, temos

$$K_c = \frac{m \|v\|^2}{2}.$$

Utilizando a métrica dada por (7.1), temos então que

$$K_c = \frac{m}{2} \left( \dot{u}^2 + f(u)^2 \dot{\phi}^2 \right). \quad (7.2)$$

Sendo o langrangiano  $L = K_c - V(u)$ , com  $V$  o potencial, segue que

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{u}^2 + f(u)^2 \dot{\phi}^2 \right) - V(u).$$

Feito isso, vamos definir as variáveis momento,  $p_u$  e  $p_\phi$ . Como vimos no capítulo 1 quando descrevemos a formulação hamiltoniana, definimos

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \quad \text{e} \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \\ \Rightarrow p_u &= m\dot{u} \quad \text{e} \quad p_\phi = mf(u)^2\dot{\phi} \end{aligned}$$

Substituindo em (7.2), temos

$$K_c = \frac{p_u^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mf(u)^2}$$

Portanto podemos definir o hamiltoniano

$$H(u, \theta, p_u, p_\phi) = \frac{p_u^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mf(u)^2} + V(u)$$

Considere então o sistema como descrito a seguir.

### 7.3 O Sistema

Lembrando que a métrica em um superfície de revolução, considerando que a curva geradora está parametrizada pelo comprimento de arco, é dada por

$$ds^2 = du^2 + f^2(u)d\phi^2. \quad (7.3)$$

Seguiremos o artigo “Gravitational and harmonic oscillator potentials on surfaces of revolution” [26] do Manuele Santoprete que sendo o Hamiltoniano do sistema

$$H(u, \phi, p_u, p_\phi) = \frac{p_u^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mf(u)^2} + V(u), \quad (7.4)$$

o Teorema de Bertrand tem como hipóteses fundamentais que:

1.  $V(u) = -\gamma\Theta(u)$ ,  $\gamma$  é uma constante positiva e

$$\Theta'(u) = \frac{1}{f(u)^2}. \quad (7.5)$$

Ver página 6 de [26]. Consequentemente temos que:

$$V(u) = - \int \frac{\gamma}{f^2(u)} du. \quad (7.6)$$

Note que no caso do plano imerso em  $\mathbb{R}^3$ , com a métrica

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\phi^2,$$

a equação acima nos dá o potencial gravitacional já conhecido

$$V = -\frac{\gamma}{r}.$$

Porém, observamos que para o caso mais geral, de uma superfície de revolução caracterizada pela métrica (7.3) e Hamiltoniano (7.4), até o momento não encontramos justificativa para a equação (7.6). Portanto, no que segue, vamos tomar (7.6) como hipótese de trabalho.

**2.**  $f$  verifica

$$(f')^2 - f''f = \beta^2, \quad (7.7)$$

com  $\beta \neq 0$ .

Observamos que a esfera naturalmente satisfaz as condição **2.** porém, o potencial com que trabalhamos, ver capítulo 5, não satisfaz a condição **1.**

A dinâmica é descrita pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\partial H}{\partial p_u} & \dot{p}_u &= -\frac{\partial H}{\partial u} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} & \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

sendo  $H$  o hamiltoniano do sistema

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = J_0 \nabla H, \quad (7.9)$$

onde  $J_0$  é a matriz simplética.

Note que  $\theta$  é uma coordenada cíclica de  $H$ , logo

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

e portanto  $p_\phi$  é uma integral primeira. Sendo assim, temos uma dinâmica com quatro graus de liberdade e duas integrais de movimento. Portanto devemos procurar mais uma integral.

**Observação** Se usarmos o *teorema de Liouville-Arnold* 13, temos que o sistema é integrável pois  $H$  e  $p_\phi$  integrais primeiras estão em involução e são independentes.

## 7.4 Preliminares

Nesta seção, sempre que falarmos  $S$  uma superfícies de revolução vamos considerar sua parametrização como feita na seção 7.1.

**Definição 7.4.1.** *Se  $u(t) \rightarrow c$  ou  $u(t) \rightarrow d$  quando  $t \rightarrow t^*$  dizemos que a solução tem uma **colisão**.*

**Proposição 7.4.1.** *A equação*

$$-ff'' + (f')^2 = b^2 \quad (7.10)$$

*é satisfeita se, e somente se, a superfície de revolução  $S$  tem curvatura Gaussiana constante e se*

$$f(u) = Ae^{i\sqrt{K}u} + Be^{-i\sqrt{K}u}$$

*com  $AB = \frac{b^2}{4K}$  ou*

$$f(u) = Cu + D$$

*com  $C = \pm b$ .*

*Demonstração.*  $\Rightarrow$ ) Se  $S$  é uma superfície de revolução, temos que sua curvatura é dada por

$$-\frac{f''}{f} = K.$$

Queremos provar que  $K$  é constante, então é suficiente mostrar que

$$\left(\frac{f''}{f}\right)' = 0. \quad (7.11)$$

Como

$$-ff'' + (f')^2 = b^2,$$

podemos escrever

$$f'' = \frac{(f')^2 - b^2}{f}.$$

Substituindo em (7.11), é equivalente provar que

$$\left( \frac{(f')^2 - b^2}{f^2} \right)' = 0$$

Vamos provar então que isso acontece.

$$\begin{aligned} \left( \frac{(f')^2 - b^2}{f^2} \right)' &= \frac{2f'f''f^2 - (f'^2 - b^2)2ff'}{f^4} \\ &= \frac{-2f'f}{f^4} (-ff'' + f'^2 - b^2) \\ \text{por (7.10)} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,  $K$  é constante.

$\Leftarrow$ ) Agora supomos que  $K$  a curvatura gaussiana da superfícies  $S$  seja constante.

Tendo isto temos que  $f(u) = Ae^{i\sqrt{K}u} + Be^{-i\sqrt{K}u}$  ou  $f(u) = Cu + D$ . Separamos em casos:

- se  $f(u) = Ae^{i\sqrt{K}u} + Be^{-i\sqrt{K}u}$ , temos

$$f'(u) = i\sqrt{K}Ae^{i\sqrt{K}u} - i\sqrt{K}Be^{-i\sqrt{K}u}$$

$$f''(u) = -KAe^{i\sqrt{K}u} - KBe^{-i\sqrt{K}u}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -ff'' + (f')^2 &= -\left(Ae^{i\sqrt{K}u} + Be^{-i\sqrt{K}u}\right)\left(-KAe^{i\sqrt{K}u} - KBe^{-i\sqrt{K}u}\right) \\ &\quad + \left(i\sqrt{K}Ae^{i\sqrt{K}u} - i\sqrt{K}Be^{-i\sqrt{K}u}\right)^2 \\ &= 4ABK \end{aligned}$$

$4ABK$  é constante, basta definirmos  $b^2 = 4ABK$ .

- se  $f(u) = Cu + D$ , temos

$$f'(u) = C$$

$$f''(u) = 0$$

Portanto,

$$-ff'' + (f')^2 = C^2$$

Definimos  $C^2 = b^2$ .

□

**Lema 7.4.1.** *Considere um potencial central em uma superfície de revolução  $S$  que tem ao menos uma órbita limitada não circular. Se todas as órbitas limitadas não singulares são fechadas então o potencial efetivo tem um mínimo.*

*Demonstração.* Vamos separar a demonstração pra cada tipo de superfície de revolução.

1 **Superfície esférica de revolução.** Nesse caso temos  $I = [c, d]$  e  $f(c) = 0 = f(d)$ . Primeiro vamos considerar o seguinte caso

- Seja  $V$  é contínua em  $I$ . Sendo  $I$  um intervalo, temos que  $V(I)$  é compacto, logo limitado. Ou seja,  $V$  é limitada em  $I$ . Lembrando que

$$V_{ef}(u) = \frac{l^2}{2mf(u)^2} + V(u),$$

e como

$$\lim_{u \rightarrow c} \frac{l^2}{2mf(u)^2} = \lim_{u \rightarrow d} \frac{l^2}{2mf(u)^2} = \infty,$$

pois  $f(c) = f(d) = 0$ . Juntando com o fato de  $V$  ser limitado, temos

$$\lim_{u \rightarrow c} V_{ef}(u) = \lim_{u \rightarrow d} V_{ef}(u) = \infty.$$

Como  $V_{ef}$  é contínua e não constante, temos que existe um ponto de mínimo no  $\text{int}(I)$  (interior do intervalo  $I$ ).

– Agora consideramos o caso em que  $V$  não é contínua em  $u = c$  mas é em  $(c, d]$ .

Se  $V'_{ef}(u) > 0$  Então  $V_{ef}$  é uma função estritamente crescente. Lembrando que

$$E = \frac{p_u^2}{2m} + V_{ef}(u),$$

onde  $E$  é o nível de energia da dinâmica. Como  $\frac{p_u^2}{2m} \geq 0$ , só ocorre dinâmica quando temos  $E \geq V_{ef}(u)$ . Observamos que  $E$  é constante, então partir de uma certa quantidade de energia que permite ter dinâmica, ela só acontece para  $u \in (c, c_*]$  onde  $c_*$  é tal que  $V_{ef}(c_*) = E$ . De fato, pois sendo  $V_{ef}$  crescente, para todo  $u \in (c_*, d]$  tem-se  $V_{ef}(u) > V_{ef}(c_*) = E$ , logo não tem dinâmica para tais valores de  $u$ . Pela continuidade de  $u$  temos que para um certo tempo,  $u \rightarrow c$ . Logo é uma órbita com colisão. Mas isso vale para todas as órbitas, portanto teríamos que todas as órbitas teriam colisão. Porém, por hipótese, existe pelo menos uma órbita limitada.

Se  $V'_{ef} \geq 0$ , com  $u_0$  tal que  $V'_{ef}(u_0) = 0$ . Nesse caso  $u_0$  é um ponto de sela. Portanto  $f$  seria crescente, apenas mudaria a concavidade. Pelo mesmo argumento anterior teríamos que q todas as órbitas têm colisões. Ou seja,  $V'_{ef} \geq 0$  não ocorre.

Então devemos ter  $u_* \in (c, d]$  onde  $V_{ef}(u_*) < 0$ . Lembrando que temos

$$\lim_{u \rightarrow d} V_{ef}(u) = \infty,$$

portando existe  $u^*$  tal que  $V'_{ef}(u^*) > 0$ . Como estamos assumindo  $V_{ef} \in C^\infty$ , existe  $u_0$  com  $V'_{ef}(u_0) = 0$ .  $u_0$  é máximo ou mínimo local. Se for máximo, pela continuidade de  $V_{ef}$  e do fato dela ir para infinito quando  $u$  tende para  $d$ , temos que existe um ponto de mínimo local  $\tilde{u}_0$ .

- O caso em que  $V$  não é contínua em  $u = d$  mas é em  $[c, d)$  é análogo ao feito acima.
- Seja  $V$  tal que é contínua apenas em  $(c, d)$ . Se  $V'_{ef} > 0$ , será estritamente crescente. Portanto teríamos, como anteriormente, que todas as órbitas têm colisões. Note que lá, não utilizamos a continuidade de  $V$  no extremo do intervalo.

Da mesma forma, se  $V'_{ef} < 0$  seria estritamente decrescente, e portanto por uma argumentação análoga, todas as órbitas teriam colisões (nesse caso  $u \rightarrow d$ ).

Se  $V'_{ef} \geq 0$  (ou  $V'_{ef} \leq 0$ ), todos os pontos críticos seriam de sela, e novamente teríamos que todas as órbitas têm colisão.

Portanto, a derivada de  $V_{ef}$  troca de sinal. Então existe ponto crítico que não é de sela. Suponha, por absurdo, que não existe ponto de mínimo local. Assim, temos apenas um ponto de máximo local  $u^*$ . Então  $V_{ef}$  é crescente em  $[c, u^*]$  e decrescente em  $[u^*, d]$ . A partir do momento que existe energia suficiente para ter dinâmica, se  $E <$

$V_{ef}(u^*)$ , existem  $u_1 \in (c, u^*)$  e  $u_2 \in (u^*, d)$  tais que  $E = V_{ef}(u_1) = V_{ef}(u_2)$ . Então a dinâmica ocorre em  $[c, u_1]$  e  $[u_2, d]$ . Ou seja,  $u(t) \in [c, u_1]$  ou  $u(t) \in [u_2, d]$ . Nos dois casos têm colisões, pois ou  $u \rightarrow c$  (no primeiro caso) ou  $u \rightarrow d$  (segundo caso). Se  $E = V_{ef}(u^*)$  a órbita é circular. E finalmente,  $E > V_{ef}(u^*)$  temos que a solução  $u(t) \in [c, d]$  então  $u \rightarrow c$  e  $\rightarrow d$ , então tem colisão! Portanto, a única órbita sem colisão seria a órbita circular, contrariando a hipótese de que existe uma órbita limitada não circular. Concluimos então que deve existir um ponto de mínimo.

## 2 Superfície hiperboloidal de revolução.

Vamos separar em casos

- Se  $I = (c, d)$  com  $-\infty < c < d < \infty$ . A argumentação é inteiramente análoga ao caso do caso acima para  $V$  continua apenas em  $(c, d)$
- Se  $I = (c, \infty)$ . Se  $V_{ef} \rightarrow \infty$  quando  $u \rightarrow \infty$ . Com argumentação análoga ao feito para para o caso acima com  $V$  contínua em  $(c, d]$ . E dela concluimos que  $V_{ef}$  tem mínimo. ( $V_{ef} \rightarrow -\infty$  quando  $u \rightarrow \infty$  é análogo).

Outra possibilidade seria  $V_{ef}$  ter uma assíntota horizontal. Se  $V_{ef} > 0$  Para valores de  $E$  abaixo o valor da assíntota temos que as órbitas tem colisões, para valores maiores ou igual as órbitas são ilimitadas.

**3 Superfície toroidal de revolução.** Aqui temos que  $\gamma(c) = \gamma(d)$  e  $I = [c, d]$ . Observe que  $\gamma(c) = (f(c), 0, g(c))$  e  $\gamma(d) = (f(d), 0, g(d))$ . Disso temos que  $f(c) = f(d)$ .

Então,

$$\begin{aligned} V_{ef}(c) - V_{ef}(d) &= \frac{l^2}{2mf(c)^2} + V(c) - \frac{l^2}{2mf(d)^2} - V(d) \\ \Rightarrow V_{ef}(c) - V_{ef}(d) &= V(c) - V(d) \\ \Rightarrow V_{ef}(c) - V_{ef}(d) &= - \int_{\gamma} F \end{aligned}$$

Sendo  $F$  uma força conservativa, a integral sob um caminho fechado é zero. Portanto,

$$V_{ef}(u) = V_{ef}(d)$$

Temos que  $V_{ef}$  é contínua em  $I = [c, d]$  e diferenciável em  $(c, d)$ . Então, existe pelo teorema do valor intermediário,  $u^* \in (c, d)$  tal que  $V'_{ef}(u^*) = 0$ ,  $u^*$  ponto de máximo ou mínimo local.

Suponha, por absurdo, que não exista ponto de mínimo local. Então,  $u^*$  é ponto de máximo. Note que se  $V_{ef}(c) \geq V_{ef}(u^*)$ . Por continuidade de  $V_{ef}$  deve existir um ponto de mínimo, então devemos ter  $V_{ef}(c) = V_{ef}(d) < V_{ef}(u^*)$ .

Logo, se  $E$  é tal que  $V_{ef}(c) = V_{ef}(d) \leq E \leq V_{ef}(u^*)$ , por continuidade, existem  $u_1 \in [c, u^*)$  e  $u_2 \in (u^*, d]$  tais que  $E = V_{ef}(u_1) = V_{ef}(u_2)$ . E a dinâmica está definida em  $[c, u_1]$  e  $[u_2, d]$ . Se  $u(t) \in [c, u_1]$ , para um certo tempo,  $u \rightarrow c$ . Da mesma forma, se  $u \in [u_2, d]$ , para um determinado tempo,  $u \rightarrow d$ . Temos colisões.

Se  $E > V_{ef}(u^*)$ ,  $u(t) \in [c, d]$ ,  $u(t) \rightarrow c$  ou  $u \rightarrow d$  para um certo tempo. Logo tem colisão. Portanto, todas as órbitas teriam colisão. Absurdo, pois por hipótese temos uma órbita limitada não circular. Logo, existe pelo menos um ponto de mínimo.

4 **Superfície paraboloidal de revolução.** Nesse caso temos  $I = [c, d)$ , onde  $-\infty < c < d \leq \infty$  com  $f(c) = 0$ . Lembrando que

$$V_{ef}(u) = \frac{l^2}{2mf(u)^2} + V(u).$$

Vamos separar em dois caso.

– Se  $V$  é contínua em  $[c, d)$ . Nesse caso, como  $\lim_{u \rightarrow c} V(u) = V(c)$  e  $\lim_{u \rightarrow c} \frac{l^2}{2mf(u)^2} = \infty$ , temos

$$\lim_{u \rightarrow c} V_{ef} = \infty$$

Portanto, excluimos a possibilidade de  $V'_{ef} > 0$ . Suponha que  $V_{ef} < 0$ . Então existe apenas um  $u_* \in [c, d)$  tal que dado uma energia total  $E$ ,  $V_{ef}(u_*) = E$ . Portanto a dinâmica está definida, em  $[u_*, d)$ . Se  $d < \infty$ . Logo ou  $u(t) \rightarrow d$  e tem uma colisão se  $d < \infty$  ou  $u(t)$  é ilimitada. Logo existe  $u_1$ , tal que  $V'_{ef}(u_1) = 0$ .

Suponha, por absurdo, que não exista pontos de mínimo. Se todos os pontos são sela, segue uma análise análoga a feita acima. Se existe um ponto que é máximo local, só existirá ele como ponto local, pois assumimos que não existe ponto de mínimo e pela continuidade da  $V_{ef}$ . Mas como  $V_{ef} \rightarrow \infty$  quando  $u \rightarrow c$  existirá um ponto de mínimo. De fato, pois próximo a  $c$  existirá  $u_2 < u_1$  tal  $V_{ef}(u_2) = V_{ef}(u_1)$ . Logo, pela continuidade de  $V_{ef}$  existirá um ponto de mínimo entre esses dois pontos!

– Agora fazemos considerar o caso em que  $V$  é contínua apenas em  $(c, d)$ . Se  $V'_{ef} > 0$ , a função é estritamente crescente, temos que as órbitas tem colisões ou são ilimitadas (para  $d < \infty$ ) ou todas têm

colisões (para “ $d = \infty$ ”). Se  $V'_{ef} < 0$ , a função é decrescente. Nesse caso as órbitas tem colisões ( $u \rightarrow d$ ) ou são ilimitadas. Logo, existe  $u^* \in (c, d)$  tal que  $V'_{ef}(u^*) = 0$ . Novamente, suponha, por absurdo, que não exista pontos de mínimo. Se todos os pontos são de sela segue uma análise análoga a feita acima. Se existe uma ponto de máximo, ele será o único, pela continuidade da  $V_{ef}$  e de supomos que não tem mínimo, denotemos ele por  $u_0$  (Já admitiremos que portanto que  $V_{ef} \rightarrow \infty$  quando  $u \rightarrow c$  e/ou  $u \rightarrow d$  pois nesse caso teríamos mínimo). Mas nesse caso, se  $d < \infty$ , quando  $E \leq V_{ef}(u_0)$  e  $E$  suficientemente grande para ter dinâmica as terão colisão. Se  $E > V_{ef}(u)$  as órbitas também terão colisão. Quando “ $d = \infty$ ” temos que as órbitas terão colisão ou serão ilimitadas.

□

**Lema 7.4.2.** *Considere um potencial central  $V$  em uma superfície de revolução  $S$  e assuma que o potencial efetivo  $V_{ef}$  associado a ele tenha um mínimo em  $u_0$  e gera órbitas fechadas, então*

$$\int_{u_1(V_{ef})}^{u_2(V_{ef})} \frac{ds}{f(s)^2} = \frac{2\sqrt{2m}}{p_\phi \beta} \sqrt{V_{ef}(u) - V_{ef}(u_0)} \quad (7.12)$$

onde  $\beta = \frac{2\pi}{\Delta\phi} \in \mathbb{Q}$  e é constante.

*Demonstração.* Consideramos uma órbita fechada. Começando em  $u_1$  e terminando em  $u_1$  (completa um período), temos que a variação do ângulo é dado por

$$\Delta\Phi = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{p_\phi du}{f(u)^2 m \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{ef}(u))}}$$

$u_2$  tomado de forma que a órbita seja simétrica em relação a reta ligando  $u_1$  e  $u_2$ .

Lembrando que  $p_\phi$  é constante, portanto podemos escrever

$$\Delta\Phi = \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{f(u)^2 \sqrt{E - V_{ef}(u)}}$$

Sendo a órbita fechada é limitada, consideramos que  $E = V_{ef}(u_1) = V_{ef}(u_2)$ , com  $u_1 < u_2$ . E denotemos por  $u_0$  onde  $V_{ef}$  atinge seu mínimo. Então tem-se  $u_1 < u_0 < u_2$ . Podemos então reescrever a integral acima como

$$\Delta\Phi = \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \left[ \int_{u_0}^{u_2} \frac{du}{f(u)^2 \sqrt{E - V_{ef}(u)}} - \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{f(u)^2 \sqrt{E - V_{ef}(u)}} \right]$$

Denotamos por  $\bar{u}_2 = u_0 + x \in [u_0, u_2]$  e  $\bar{u}_1 = u_0 + y \in [u_1, u_0]$ . Então,

$$\Delta\Phi = \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \left[ \int_{u_0}^{u_2} \frac{d\bar{u}_2}{f(\bar{u}_2)^2 \sqrt{E - V_{ef}(\bar{u}_2)}} - \int_{u_0}^{u_1} \frac{d\bar{u}_1}{f(\bar{u}_1)^2 \sqrt{E - V_{ef}(\bar{u}_1)}} \right]$$

Fazendo  $y_i = V_{ef}(\bar{u}_i)$ , temos que  $dy = V'_{ef}(\bar{u}_i) d\bar{u}_i$ . Lembrando que  $V_{ef}(u_2) = V_{ef}(u_1) = E$ , tem-se

$$\Delta\Phi = \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \left[ \int_{V_{ef}(u_0)}^E \frac{1}{f(\bar{u}_2)^2 V'_{ef}(\bar{u}_2)} \frac{dy_2}{\sqrt{E - y_2}} - \int_{V_{ef}(u_0)}^E \frac{1}{f(\bar{u}_1)^2 V'_{ef}(\bar{u}_1)} \frac{dy_1}{\sqrt{E - y_1}} \right]$$

$$= \int_{V_{ef}(u_0)}^E \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \left( \frac{1}{f(\bar{u}_2)^2 V'_{ef}(\bar{u}_2)} - \frac{1}{f(\bar{u}_1)^2 V'_{ef}(\bar{u}_1)} \right) \frac{dy}{\sqrt{E - y}}$$

Definimos  $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \left( \frac{1}{f(\bar{u}_2)^2 V'_{ef}(\bar{u}_2)} - \frac{1}{f(\bar{u}_1)^2 V'_{ef}(\bar{u}_1)} \right)$ . Feito isso, podemos escrever de forma simplificada

$$\Delta\Phi = \int_{V_{ef}(u_0)}^E \Gamma \frac{dy}{\sqrt{E - y}}.$$

Agora, dividimos por  $\sqrt{W - E}$  a equação acima e integramos em relação a  $E$  de  $V_{ef}(u_0)$  a  $W$ ,

$$\int_{V_{ef}(u_0)}^W \frac{\Delta\Phi dE}{\sqrt{W - E}} = \int_{V_{ef}(u_0)}^W \int_{V_{ef}(u_0)}^E \Gamma \frac{dy dE}{\sqrt{E - y}\sqrt{W - E}}$$

Trocando a ordem de integração fica

$$\int_{V_{ef}(u_0)}^W \frac{\Delta\Phi dE}{\sqrt{W - E}} = \int_{V_{ef}(u_0)}^E \int_y^W \Gamma \frac{dE dy}{\sqrt{E - y}\sqrt{W - E}} \quad (7.13)$$

$$\int_{V_{ef}(u_0)}^W \frac{\Delta\Phi dE}{\sqrt{W - E}} = \pi \int_{V_{ef}(u_0)}^E \Gamma dy$$

Utilizando na equação acima a definição de  $\Gamma$  que fizemos anteriormente,

$$\int_{V_{ef}(u_0)}^W \frac{\Delta\Phi dE}{\sqrt{W - E}} = \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \pi \int_{V_{ef}(u_0)}^E \left( \frac{1}{f(\bar{u}_2)^2 V'_{ef}(\bar{u}_2)} - \frac{1}{f(\bar{u}_1)^2 V'_{ef}(\bar{u}_1)} \right) dy \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \pi \left( \int_{V_{ef}(u_0)}^E \frac{1}{f(\bar{u}_2)^2 V'_{ef}(\bar{u}_2)} dy - \int_{V_{ef}(u_0)}^E \frac{1}{f(\bar{u}_1)^2 V'_{ef}(\bar{u}_1)} dy \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \pi \left( \int_{u_0}^{u_2} \frac{1}{f(\bar{u}_2)^2} d\bar{u}_2 - \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{f(\bar{u}_1)^2} d\bar{u}_1 \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{f(s)^2} ds \end{aligned} \quad (7.15)$$

O que se fez até vale para todas as órbitas limitadas. Mas temos uma informação a mais, de que elas são fechadas. Sendo fechada temos que  $\Delta\Phi = 2\pi \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$  constante. Substituindo na equação na equação acima,

$$\frac{2\pi}{\beta} \int_{V_{ef}(u_0)}^W \frac{dE}{\sqrt{W - E}} = \sqrt{\frac{2}{m}} p_\phi \pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{f(s)^2} ds,$$

onde  $\beta = \frac{p}{q}$ . Calculando a integral do lado esquerdo da equação e uma simples manipulação algébrica temos o que queríamos.  $\square$

**Lema 7.4.3.** *Se em um campo central em uma superfície de revolução  $S$  todas as órbitas próximas a uma órbita circular são fechadas, então o potencial  $V(u)$  satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{V''(u_0)}{V'(u_0)} = \frac{\beta^2 - 3f'^2(u_0)}{f'(u_0)f(u_0)} + \frac{f''(u_0)}{f'(u_0)}. \quad (7.16)$$

onde  $u_0$  é o ponto mínimo de  $V_{ef}$

*Demonstração.* Seja o potencial efetivo dado por

$$V_{ef}(u) = \frac{p_\phi^2}{2mf(u)^2} + V(u).$$

Expandindo-o em série de Taylor de segunda ordem em volta do seu ponto de mínimo  $u_0$ , temos

$$V_{ef}(u) - V_{ef}(u_0) = \frac{(u - u_0)^2}{2} V_{ef}''(u_0) + o(u - u_0),$$

onde  $o(u - u_0)$ . Note que  $V_{ef}'(u_0) = 0$ , pois  $u_0$  é ponto de mínimo.

Pelo lema anterior,

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{f(s)^2} = \frac{2\sqrt{2m}}{p_\phi\beta} \sqrt{V_{ef}(u) - V_{ef}(u_0)},$$

onde  $u_2 = u_0 + x$  e  $u_1 = u_0 - y$ , com  $y, x > 0$ .

Considerando  $u$  suficientemente próximo de  $u_0$ , de forma que o erro possa ser desprezado na expansão de Taylor, temos

$$\left( \int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{f(s)^2} \right)^2 = \frac{8m}{p_\phi^2\beta^2} \frac{(u - u_0)^2}{2} V_{ef}''(u_0). \quad (7.17)$$

Olhamos para a integral acima,

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{f(s)^2} &= \int_{u_0-y}^{u_0+x} \frac{ds}{f(s)^2} \\ &= \int_{u_0}^{u_0+x} \frac{ds}{f(s)^2} - \int_{u_0}^{u_0-y} \frac{ds}{f(s)^2} \end{aligned}$$

Fazendo a expansão em série de Taylor de segunda ordem, e tomando  $x = y$  temos

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{f(s)^2} = \frac{2x}{f(u_0)^2}.$$

Substituindo em (7.17),

$$\frac{4x^2}{f(u_0)^4} = \frac{4mx^2}{p_\phi^2 \beta^2} V_{ef}''(u_0). \quad (7.18)$$

Do fato que  $V_{ef}'(u_0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{p_\phi^2}{2mf(u_0)^2} + V(u_0) \right)' \Big|_{u=u_0} &= 0 \\ -\frac{p_\phi^2 f'(u_0)}{mf(u_0)^3} + V'(u_0) &= 0 \\ p_\phi^2 &= \frac{mf(u_0)^3 V'(u_0)}{f'(u_0)}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Substituindo o encontrado acima em (7.23),

$$\begin{aligned} \frac{4x^2}{f(u_0)^4} &= \frac{4mx^2 f'(u_0) V_{ef}''(u_0)}{\beta^2 mf(u_0)^3 V'(u_0)} \\ \Rightarrow \beta^2 &= \frac{f(u_0) f'(u_0) V_{ef}''(u_0)}{V'(u_0)}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Sabemos que

$$V_{ef}''(u) = \frac{-p_\phi^2 f''(u) mf(u)^3 + 3p_\phi^2 m f'(u)^2 f(u)^2}{(mf(u)^3)^2} + V''(u),$$

avaliando em  $u_0$  e utilizando (7.19), temos

$$V_{ef}''(u_0) = V'(u_0) \left( \frac{-f''(u_0)}{f'(u_0)} + \frac{3f'(u_0)}{f(u_0)} \right) + V''(u_0).$$

Pelo encontrado acima e aplicando em (7.20) encontramos

$$\begin{aligned} \beta^2 &= f(u_0) f'(u_0) \left[ \left( \frac{-f''(u_0)}{f'(u_0)} + \frac{3f'(u_0)}{f(u_0)} \right) + \frac{V''(u_0)}{V'(u_0)} \right] \\ \Rightarrow \frac{V''(u_0)}{V'(u_0)} &= \frac{f''(u_0)}{f'(u_0)} - 3 \frac{f'(u_0)}{f(u_0)} + \frac{\beta^2}{f(u_0) f'(u_0)}. \end{aligned}$$

A equação acima é equivalente a equação (7.16).  $\square$

**Lema 7.4.4.** *Se em um campo central em uma superfície de revolução  $S$  todas as órbitas próximas a órbita circular são fechadas, então  $\beta$  satisfaz a seguinte equação,*

$$\beta^4 - 5(-f''f + (f')^2)\beta^2 - 5f''(f')^2f + 4(f'')^2f^2 - 3f'''(f)^2 + 4(f')^4 = 0.$$

*Demonstração.* Denotando por  $u_0$  o ponto de mínimo de  $V_{ef}$ . Consideramos a expansão de Taylor de quarta ordem de uma órbita próxima da órbita circular (órbita definida para  $u_0$ ), próxima suficiente para ser fechadas. Considerando  $u_2 = u_0 + x$  e  $u_1 = u_0 - y$ , de forma que  $V_{ef}(u_1) = V_{ef}(u_2)$  (denotaremos simplesmente por  $V_{ef}$ ), ou seja,  $u_1$  e  $u_2$  limitam tal órbita. A partir de todas essas considerações temos

$$V_{ef} - V_{ef}(u_0) = \frac{x^2}{2}V_{ef}''(u_0) + \frac{x^3}{6}V_{ef}^{(3)}(u_0) + \frac{x^4}{24}V_{ef}^{(4)}(u_0) \quad (7.21)$$

$$= \frac{y^2}{2}V_{ef}''(u_0) - \frac{y^3}{6}V_{ef}^{(3)}(u_0) + \frac{y^4}{24}V_{ef}^{(4)}(u_0) \quad (7.22)$$

Note que  $V'(u_0) = 0$ . Consideremos a integração

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{f(s)^2} = \int_{u_0-y}^{u_0+x} \frac{ds}{f(s)^2} = \int_{u_0}^{u_0+x} \frac{ds}{f(s)^2} - \int_{u_0}^{u_0-y} \frac{ds}{f(s)^2}$$

Vamos expandir cada uma dessas duas integrais resultantes em série de Taylor de terceira ordem. Isso se faz da seguinte maneira, define-se

$$g(x) = \int_{u_0}^{u_0+x} \frac{ds}{f(s)^2}$$

Segue a expansão em torno de  $x = 0$

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + \sum_{i=1}^3 \frac{x^i g^{(i)}(0)}{i!} + o(x) \\ &= \frac{x}{f(u_0)^2} - \frac{x^2 f'(u_0)}{f^3(u_0)} + \frac{x^3}{6} \left( \frac{6f'(u_0)^2}{f(u_0)^4} - \frac{2f''(u_0)}{f(u_0)^3} \right) + o(x) \end{aligned}$$

onde  $o(x)$  representa o erro, que a partir de agora será desprezado. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{f(s)^2} &= \frac{x}{f(u_0)^2} - \frac{x^2 f'(u_0)}{f^3(u_0)} + \frac{x^3}{6} \left( \frac{6f'(u_0)^2}{f(u_0)^4} - \frac{2f''(u_0)}{f(u_0)^3} \right) \\ &+ \frac{y}{f(u_0)^2} + \frac{y^2 f'(u_0)}{f^3(u_0)} + \frac{y^3}{6} \left( \frac{6f'(u_0)^2}{f(u_0)^4} - \frac{2f''(u_0)}{f(u_0)^3} \right) \end{aligned} \quad (7.23)$$

Tomemos  $y = x(1 + ax + bx^2 + \dots)$ . Vamos calcular alguns termos das potências de  $y$  que serão úteis nas equações (7.22) e (7.23).

$$y^2 = x^2 + 2ax^3 + (2b + a^2)x^4 + h_1$$

$$y^3 = x^3 + 3ax^4 + h_2$$

$$y^4 = x^4 + h_3$$

onde a  $h_1, h_2, h_3$  tem uma dependência a potências de  $x$  maior ou igual a 5.

Primeiro, vamos substituir as potências acima na equação (7.22) e comparar com a equação (7.21), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} V_{ef}''(u_0) + \frac{x^3}{6} V_{ef}^{(3)}(u_0) + \frac{x^4}{24} V_{ef}^{(4)}(u_0) &= \frac{x^2}{2} V_{ef}''(u_0) \left( aV_{ef}''(u_0) - \frac{V_{ef}^{(3)}(u_0)}{6} \right) x^3 \\ &+ \left[ \frac{(2b + a^2)}{2} V_{ef}''(u_0) - \frac{a}{2} V_{ef}^{(3)}(u_0) + \frac{1}{24} V_{ef}^{(4)}(u_0) \right] x^4 \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das potências de  $x$  dos dois lados da equação acima, concluímos que  $a = \frac{V_{ef}^{(3)}(u_0)}{3V_{ef}''(u_0)}$  e  $b = a^2$ . Feito isso, agora vamos substituir as potências de  $y$  na equação (7.23), observando que não utilizaremos as parcelas

que envolvem  $x^4$ .

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{f(s)^2} &= \frac{x}{f(u_0)^2} - \frac{x^2 f'(u_0)}{f(u_0)^3} + \frac{x^3}{6} \left( \frac{6f'(u_0)^2}{f(u_0)^4} - \frac{2f''(u_0)}{f(u_0)^3} \right) + \frac{x}{f(u_0)^2} \\ &+ \frac{ax^2}{f(u_0)^2} + \frac{a^2 x^3}{f(u_0)^2} + \frac{x^2 f'(u_0)^2}{2f(u_0)^3} + \frac{2ax^3 f'(u_0)}{f(u_0)^3} + \frac{x^3}{6} \left( \frac{6f'(u_0)^2}{f(u_0)^4} - \frac{2f''(u_0)}{f(u_0)^3} \right) \\ &= \frac{2x}{f(u_0)^2} + \frac{ax^2}{f(u_0)^2} + \left( \frac{2af'(u_0)}{f(u_0)^3} + \frac{2f'(u_0)}{f(u_0)^4} - \frac{2f''(u_0)}{f(u_0)^3} \right) x^3 \end{aligned}$$

Então, da equação acima, tem-se que

$$\left( \int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{f(s)^2} \right)^2 = \frac{x^2}{f(u_0)^4} \left[ 4 + 4ax + \left( 5a^2 + \frac{8af'(u_0)}{f(u_0)} + \frac{8f'(u_0)^2}{f(u_0)^2} - \frac{8f''(u_0)}{3f(u_0)} \right) x^2 \right] \quad (7.24)$$

Por outro lado, chamando a equação (7.12), temos

$$\left( \int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{f(s)^2} \right)^2 = \frac{8m}{p_\phi^2 \beta^2} (V_{ef} - V_{ef}(u_0))$$

Substituindo na equação acima a equação (7.21)

$$\left( \int_{u_1}^{u_2} \frac{ds}{f(s)^2} \right)^2 = \frac{4m}{p_\phi^2 \beta^2} x^2 \left( V_{ef}''(u_0) + \frac{x}{3} V_{ef}^{(3)}(u_0) + \frac{x^2}{12} V_{ef}^{(4)}(u_0) \right) \quad (7.25)$$

Comparando as equações (7.24) e (7.25), concluímos

$$\frac{4}{f(u_0)^4} = \frac{4mV_{ef}''(u_0)}{p_\phi^2 \beta^2} \quad (7.26)$$

$$\frac{4a}{f(u_0)^4} = \frac{4mV_{ef}^{(3)}(u_0)}{3p_\phi^2 \beta^2}$$

$$\frac{1}{f(u_0)^4} \left( 5a^2 + 8a \frac{f'(u_0)}{f(u_0)} + 8 \frac{f'(u_0)^2}{f(u_0)^2} - \frac{8f''(u_0)}{3f(u_0)} \right) = \frac{mV_{ef}^{(4)}(u_0)}{3p_\phi^2 \beta^2}. \quad (7.27)$$

Da equação (7.26) temos

$$V_{ef}''(u_0) = \frac{p_\phi^2 \beta^2}{mf(u_0)^4 m}.$$

De (7.19), obtemos

$$V_{ef}''(u_0) = \frac{V'(u_0)\beta^2}{f'(u_0)f(u_0)}. \quad (7.28)$$

Derivando (7.16), observando que vale para órbitas a próxima circular, e utilizando (7.19), temos

$$V_{ef}^{(3)}(u_0) = V'(u_0) \left[ \frac{1}{f(u_0)^2} \left( \frac{\beta^2}{f'(u_0)^2} - 7 \right) + \frac{f''(u_0)}{f'(u_0)^2 f(u_0)} \right] \quad (7.29)$$

$$V_{ef}^{(4)}(u_0) = \frac{V'(u_0)}{f'f^3} \left[ \frac{\beta^4}{f'(u_0)^2} - 12\beta^2 - \frac{f^2(f'')^2}{(f')^2} - 20f''f + \frac{2f'''f^2}{f'^2} + 47(f')^2 \right] \beta^2. \quad (7.30)$$

Sendo  $a = \frac{V^{(3)}(u_0)}{3V''(u_0)}$ , utilizando as equações (7.28) e 7.29)

$$a = \frac{1}{3} \left[ \frac{f'(u_0)}{f(u_0)} \left( \frac{\beta^2}{f'(u_0)^2} - 7 \right) + \frac{f''(u_0)}{f'(u_0)} \right]. \quad (7.31)$$

Para concluirmos o que queremos basta substituir as equações (7.31) e (7.30) em (7.27).

□

## 7.5 O Teorema

Segue o enunciado do teorema como em [25].

**Teorema 16. Teorema de Bertrand** *Considere um campo central analítico em uma superfície de revolução  $S$  com curvatura gaussiana constante que tem ao menos uma órbita limitada não circular. Assuma que o potencial efetivo  $V_{ef}(u)$  tem um mínimo local. Então todas as órbitas limitadas (não singulares) são fechadas se, e somente se,*

$$-ff'' + (f')^2 = \beta^2, \quad (7.32)$$

caso em que a energia potencial toma a forma  $V(u) = a\Theta(u)$  ou

$$-ff'' + (f')^2 = \frac{\beta^2}{4}, \quad (7.33)$$

caso em que  $V(u) = \frac{k}{\Theta^2(u)}$ . Nos dois casos,  $\Theta$  é uma antiderivada de  $\frac{1}{f(u)^2}$  e  $\beta \in \mathbb{Q}$ .

*Demonstração.* Começamos supondo que todas as órbitas limitadas (não singulares) são fechadas. Como  $V_{ef}$  tem um mínimo local, o potencial tem ao menos uma órbita fechada não circular. Então podemos aplicar o lema 7.4.1, e portanto  $V_{ef}$  tem um ponto de mínimo  $u_0$ .

Tendo isto, podemos aplicar os lemas 7.4.3 e 7.4.4, que nos dão, respectivamente, que as seguintes equações são satisfeitas:

$$\frac{V''(u_0)}{V'(u_0)} = \frac{\beta^2 - 3f'^2(u_0)}{f'(u_0)f(u_0)} + \frac{f''(u_0)}{f(u_0)} \quad (7.34)$$

e

$$\beta^4 - 5(-f''f + (f')^2)\beta^2 - 5f''(f')^2f + 4(f'')^2f^2 - 3f'''f'f^2 + 4(f')^4 = 0. \quad (7.35)$$

Temos que a curvatura gaussiana é dada por

$$K = \frac{-f''}{f},$$

sendo  $K$  constante, temos a seguinte equação diferencial

$$f'' = -Kf. \quad (7.36)$$

Vamos separar em dois casos, quando  $K = 0$  e  $K \neq 0$ .

### CASO $K = 0$

Nesse caso, (7.36) se torna

$$f'' = 0.$$

Portanto,

$$f(u) = Cu + D,$$

com  $C$  e  $D$  constantes.

Substituindo na equação (7.35), temos

$$\beta^4 - 5C^2\beta^2 + 4C^4 = 0$$

Denotando,  $\beta^2 = y$ , podemos reescreve-la como

$$y^2 - 5C^2y + 4C^4 = 0.$$

Logo,  $\beta^2 = y = 4C^2$  ou  $C^2$ .

- se  $\beta^2 = C^2$ , pela proposição (7.4.1),  $f$  satisfaz a equação (7.32),

$$-ff'' + (f')^2 = \beta^2.$$

Substituindo na equação (7.34) temos

$$\begin{aligned} \frac{V''(u_0)}{V'(u_0)} &= \frac{-f(u_0)f''(u_0) + f'^2(u_0) - 3f'^2(u_0)}{f'(u_0)f(u_0)} + \frac{f''(u_0)}{f(u_0)} \\ &= \frac{-f''(u_0)}{f'(u_0)} - 2\frac{f'(u_0)}{f(u_0)} + \frac{f''(u_0)}{f(u_0)} \\ &= -2\frac{f'(u_0)}{f(u_0)}. \end{aligned}$$

Então, consideramos a equação diferencial

$$\frac{V''(u)}{V'(u)} = -2\frac{f'(u)}{f(u)}.$$

Integrando dos dois lados temos,

$$\log(|V'|) = \log\left(\frac{1}{f^2(u)}\right) + \tilde{C}.$$

Passando a função exponencial dos dois lados,

$$|V'(u)| = \tilde{C}_0 \frac{1}{f^2(u)}$$

Então  $V$  é tal que pode ser escrito como  $V(u) = a\Theta(u)$ ,  $\Theta$  uma antiderivada de  $\frac{1}{f^2(u)}$ .

- Se  $\beta^2 = 4C^2$ , novamente pela proposição 7.4.1,  $f$  satisfaz

$$-ff'' + (f')^2 = \frac{\beta^2}{4}.$$

Substituindo na equação (7.34) temos

$$\begin{aligned} \frac{V''(u_0)}{V'(u_0)} &= \frac{-4f(u_0)f''(u_0) + 4f'^2(u_0) - 3f'^2(u_0)}{f'(u_0)f(u_0)} + \frac{f''(u_0)}{f'(u_0)} \\ &= \frac{-4f(u_0)f''(u_0) + f'^2(u_0) + f(u_0)f''(u_0)}{f'(u_0)f(u_0)} \\ &= \frac{-3f(u_0)f''(u_0) + f'^2(u_0)}{f'(u_0)f(u_0)} \end{aligned}$$

Consideramos a equação diferencial

$$\frac{V''(u)}{V'(u)} = \frac{-3f(u)f''(u) + f'^2(u)}{f'(u)f(u)} \quad (7.37)$$

Vamos mostrar que  $V(u) = \frac{k}{\Theta^2}$  é solução da equação acima. Note primeiro que utilizando  $-ff'' + (f')^2 = \frac{\beta^2}{4}$  temos

$$\begin{aligned} \frac{-3f(u)f''(u) + f'^2(u)}{f'(u)f(u)} &= \frac{3\left(\frac{\beta^2}{4} - f'^2(u)\right) + f'^2(u)}{f(u)f'(u)} \\ &= \frac{-2f'^2(u) + \frac{3}{4}\beta^2}{f(u)f'(u)} \\ &= -\frac{2f'(u)}{f(u)} + \frac{3\beta^2}{4f(u)f'(u)} \end{aligned}$$

Feito isso, vamos mostrar que para  $V(u) = \frac{k}{\Theta^2}$ ,

$$\frac{V''}{V'} = -\frac{2f'(u)}{f(u)} + \frac{3\beta^2}{4f(u)f'(u)}.$$

Sendo  $V(u) = \frac{k}{\Theta^2(u)}$  temos

$$V'(u) = \frac{-2k}{\Theta^3 f^2}$$

e

$$V''(u) = \frac{2k(3\Theta^2 + 2ff'\Theta^3)}{(\Theta^3 f^2)^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{V''}{V'} &= \frac{-(3\Theta^2 + 2ff'\Theta^3)}{f^2\Theta^3} \\ &= -\frac{3}{f^2\Theta} - \frac{2f'}{f}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Agora, observe que

$$\left(\frac{f'}{f}\right)' = \frac{f''f - f'^2}{f^2} = \frac{-\beta^2\Theta'}{4}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{-\beta^2\Theta}{4} \\ \Rightarrow \Theta &= -\frac{4f'}{\beta^2 f} \end{aligned} \quad (7.39)$$

Substituindo (7.39) em (7.38) temos

$$\frac{V''}{V'} = -\frac{3}{f^2} \left(\frac{-\beta^2 f}{4f'}\right) - \frac{2f'}{f} = \frac{3\beta^2}{4ff'} - \frac{2f'}{f}.$$

Demonstrando assim o que queríamos. Portanto  $V(u) = \frac{k}{\Theta^2(u)}$  é solução da equação diferencial (7.37).

Passemos agora para o caso em que  $K \neq 0$ . Iremos cair num caso análogo ao feito acima.

### CASO $K \neq 0$

Agora temos que

$$f'' = -Kf.$$

Resolvendo essa EDO, temos

$$f(u) = Ae^{i\sqrt{K}u} + Be^{-i\sqrt{K}u}, \quad (7.40)$$

com  $A$  e  $B$  constantes. Vamos encontrar os possíveis valores para  $\beta$ . Primeiro passo utilizamos a EDO acima para simplificarmos (7.35). Então, a equação se torna,

$$\beta^4 - 5K\beta^2 f^2 - 5\beta^2 f'^2 + 5f^2 f'^2 + 4K^2 f^4 + 3K f'^2 f^2 + f'^4 = 0.$$

Fizemos isso, simplesmente para tirarmos os termos que envolvem  $f''$  e  $f'''$  da equação. Substituindo (7.40) na equação acima obtemos,

$$(\beta^2)^2 - 20K^2\beta^2 AB + 64K^2 A^2 B^2 = 0.$$

Portanto,  $\beta^2 = 16KAB$  ou  $4KAB$ . Ou seja,  $AB = \frac{\beta^2}{16K}$  ou  $AB = \frac{\beta^2}{4K}$ .

Vamos analisar os dois casos possíveis, como fizemos para  $K = 0$ .

- Se  $AB = \frac{\beta^2}{4K}$ , pela proposição 7.4.1, temos

$$-ff'' + (f')^2 = \beta^2.$$

Portanto segue o resultado diretamente do primeiro caso que calculamos para  $K = 0$ . E então o potencial toma a forma  $V(u) = a\Theta(u)$ .

- Considerando  $AB = \frac{\beta^2}{16K} = \frac{1}{4K} \left( \frac{\beta^2}{4} \right)$ . Novamente pela proposição 7.4.1 temos,

$$-ff'' + (f')^2 = \frac{\beta^2}{4}.$$

Seguindo as contas do segundo caso para  $K = 0$  devemos ter o potencial

$$V(u) = \frac{k}{\Theta^2(u)}.$$

□

# Capítulo 8

## Integrais Adicionais

### 8.1 O vetor de Laplace-Runge-Lenz generalizado

Nessa seção, temos como objetivo encontrar uma generalização do vetor de Laplace-Runge-Lenz, estudado na seção 2.7, considerando que a dinâmica ocorre em uma superfície de rotação de curvatura constante e positiva. E como consequência encontraremos duas novas integrais de movimento. Esse estudo será feito em cima do trabalho de Santoprete [26].

#### 8.1.1 A Superfície

Consideremos uma curva regular simples dada por

$$\begin{aligned}\gamma &: [r_s, r_n] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ r &\longmapsto (f(r), 0, g(r))\end{aligned}$$

$\gamma \in C^1$  e vamos supor que  $\|\gamma'(r)\| = 1$  ( $r = u$  do capítulo anterior). Além disso, que  $f(r) > 0$  e  $f(r) = 0 \iff r = r_s$  ou  $r = r_n$ . Observamos que a curva está no plano XZ.

Consideramos a superfície gerada pela rotação da curva  $\gamma$  em torno do  $z$ . Temos que essa superfície pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &: (r_s, r_n) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \phi) &\longmapsto \mathbf{X}(r, \phi) = (f(r)\cos(\phi), f(r)\sen(\phi), g(r)) \end{aligned}$$

A métrica da superfície é como a métrica considerada no capítulo anterior.

## 8.2 Integrais quadráticas

Vamos buscar integrais de movimento quadráticas nos momentos. Como em [26], essas integrais são da seguinte forma:

$$I = a(r, \phi)p_r^2 + 2b(r, \phi)p_\phi p_r + c(r, \phi)p_\phi^2 + \Phi(r, \phi). \quad (8.1)$$

**Proposição 1.** *Seja um sistema que satisfaz as equações de (7.8), com o Hamiltoniano da forma (7.4) que verificam as condições (7.5) e (7.7). Então, as funções do tipo  $I = a(r, \phi)p_r^2 + 2b(r, \phi)p_\phi p_r + c(r, \phi)p_\phi^2 + \Phi(r, \phi)$  com*

$$a(r, \phi) = a_0$$

$$b(r, \phi) = E_1 \sen(\beta\phi) - E_2 \cos(\beta\phi)$$

$$c(r, \phi) = \frac{a_0}{f^2} - 2(\beta E_1 \cos(\beta\phi) + \beta E_2 \sen(\beta\phi)) \frac{V(r)}{\gamma} + \Gamma$$

$$\Phi(r, \phi) = 2a_0 m V(r) - \frac{2m\gamma E_1}{\beta} \cos(\beta\phi) - \frac{2m\gamma E_2}{\beta} \sen(\beta\phi),$$

são integrais de movimento para  $a_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  e  $\Gamma$  constantes arbitrárias.

**Observação 1.** Como veremos nas seções seguintes, rearranjando os termos de  $I$  da proposição acima, mostraremos que ele pode ser escrito como:

$$I = 2E_1 I_1 - 2E_2 I_2 + 2a_0 m H + \Gamma p_\phi^2,$$

onde

$$I_1 = \text{sen}(\beta\phi)p_r p_\phi - \beta \cos(\beta\phi) \frac{V(r)}{\gamma} p_\phi^2 - \frac{m\gamma}{\beta} \cos(\beta\phi)$$

$$I_2 = \cos(\beta\phi)p_r p_\phi + \beta \text{sen}(\beta\phi) \frac{V(r)}{\gamma} p_\phi^2 + \frac{m\gamma}{\beta} \text{sen}(\beta\phi),$$

e mais,  $I_1$  e  $I_2$  também são integrais primeiras, e portanto  $I$  é uma combinação linear de quatro integrais.

**Observação 2.** As quatro integrais,  $I_1, I_2, p_\phi$  e  $H$ , não serão independentes, porém, qualquer conjunto com três dessas quatro integrais o será.

### 8.3 Demonstração

Separamos a demonstração da proposição acima em partes, devido ao seu tamanho e o número de cálculos, no objetivo de facilitar a leitura e compreensão.

#### Condições para $I$ como integral de movimento

Para  $I$ , tomado como em (8.1), ser uma integral primeira devemos ter  $\{H, I\} = 0$ .

Usando que  $\{H, I\} = \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial I}{\partial p_r} - \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial \phi} \frac{\partial I}{\partial p_\phi} - \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \frac{\partial I}{\partial \phi}$ , temos

$$\begin{aligned}
\{H, I\} &= \left( -\frac{f'(r)}{mf(r)^3} p_\phi^2 + V'(r) \right) (2ap_r + 2bp_\phi) - \frac{p_r}{m} \left( p_r^2 \frac{\partial a}{\partial r} + 2p_r p_\phi \frac{\partial b}{\partial r} + p_\phi^2 \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \\
&\quad - \frac{p_\phi}{mf(r)^2} \left( a \frac{\partial a}{\partial \phi} p_r^2 + 2 \frac{\partial b}{\partial \phi} p_r p_\phi + \frac{\partial c}{\partial \phi} p_\phi^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \\
&= p_r p_\phi^2 \left( -\frac{2af'(r)}{mf(r)^3} - \frac{1}{m} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{2}{mf(r)^2} \frac{\partial b}{\partial \phi} \right) + p_\phi^3 \left( -\frac{2bf'(r)}{mf(r)^3} - \frac{1}{mf(r)^2} \frac{\partial c}{\partial \phi} \right) \\
&\quad + p_r \left( 2aV'(r) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + p_\phi \left( 2bV'(r) - \frac{1}{mf(r)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + p_r^3 \left( -\frac{1}{m} \frac{\partial a}{\partial r} \right) \\
&\quad + p_r^2 p_\phi \left( -\frac{2}{m} \frac{\partial b}{\partial r} - \frac{1}{mf(r)^2} \frac{\partial a}{\partial \phi} \right)
\end{aligned}$$

Portanto temos que  $\{H, I\} = 0 \iff$  as seguintes condições são satisfeitas:

(I)

$$-\frac{2af'(r)}{mf(r)^3} - \frac{1}{m} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{2}{mf(r)^2} \frac{\partial b}{\partial \phi} = 0$$

(II)

$$-\frac{2bf'(r)}{mf(r)^3} - \frac{1}{mf(r)^2} \frac{\partial c}{\partial \phi} = 0$$

(III)

$$2aV'(r) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

(IV)

$$-\frac{1}{mf(r)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + 2bV'(r) = 0$$

(V)

$$\frac{1}{m} \frac{\partial a}{\partial r} = 0$$

(VI)

$$\frac{2}{m} \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{1}{mf(r)^2} \frac{\partial a}{\partial \phi} = 0$$

Vamos buscar as funções  $a, b, c$  e  $\Phi$ .

## 8.4 Encontrando a expressão de $I$

Agora, vamos usar as seis condições acima para encontrarmos as funções  $a, b, c$  e  $\Phi$ . Feito isso, encontraremos a expressão de  $I$  por (8.1).

**Encontrando  $a, b, c$  e  $\Phi$**

Considerando as condições (III) e (IV) temos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 2amV'(r), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 2bm f(r)^2 V'(r). \quad (8.2)$$

Lembrando que  $V(r) = \gamma\Theta(r)$  e  $\Theta'(r) = \frac{1}{f(r)^2}$ , temos

$$V'(r) = \frac{\gamma}{f(r)^2}.$$

Então, substituindo em (8.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{2am\gamma}{f(r)^2} &\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \phi} = \frac{2m\gamma}{f(r)^2} \frac{\partial a}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 2bm\gamma &\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial r} = 2m\gamma \frac{\partial b}{\partial r}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \phi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial r}$ , pelo feito acima,

$$\begin{aligned} \frac{2m\gamma}{f(r)^2} \frac{\partial a}{\partial \phi} &= 2m\gamma \frac{\partial b}{\partial r} \\ \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial \phi} &= f(r)^2 \frac{\partial b}{\partial r} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Pela condição (VI),  $\frac{\partial a}{\partial \phi} = -2f(r)^2 \frac{\partial b}{\partial r}$ . Essa igualdade com (8.3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial r} &= -2 \frac{\partial b}{\partial r} \\ \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial r} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $b = b(\phi)$ . Voltando a (8.3), concluimos que

$$\frac{\partial a}{\partial \phi} = 0.$$

Juntando com a condição (V), temos que  $a(r, \phi) = a_0$  constante. Portanto encontramos o  $a$ , nos restando ainda a tarefa de encontrar as outras três funções.

Agora consideremos a condição (I),

$$\frac{2af'(r)}{f(r)^3} + \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{2}{f(r)^2} \frac{\partial b}{\partial \phi} = 0.$$

Integrando em relação a  $r$  temos

$$-\frac{a_0}{f(r)^2} + c(r, \phi) + 2\Theta(r) \frac{\partial b}{\partial \phi} + \Gamma(\phi) = 0.$$

Então,

$$c(r, \phi) = \frac{a_0}{f(r)^2} - 2\Theta(r) \frac{\partial b}{\partial \phi} - \Gamma(\phi) \quad (8.4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \phi} = -2\Theta(r) \frac{\partial^2 b}{\partial \phi^2} - \Gamma'(\phi). \quad (8.5)$$

Da condição (II),  $-\frac{2bf'(r)}{mf(r)^3} - \frac{1}{mf(r)^2} \frac{\partial c}{\partial \phi} = 0$ , tem-se  $\frac{\partial c}{\partial \phi} = -\frac{2bf'(r)}{f}$ . Igualando a (8.5), obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{2bf'(r)}{f(r)} &= 2\Theta(r) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \Gamma'(\phi) \\ \Rightarrow 2\Theta(r) \frac{\partial^2 b}{\partial \phi^2} - \frac{2f'(r)b}{f(r)} + \Gamma'(\phi) &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

**Observação:** Note que, tendo  $(f'')^2 - f''f = \beta^2$  e  $\Theta'(r) = \frac{1}{f(r)^2}$ ,

$$\left(\frac{f'}{f}\right)' = \frac{f''f - f'f'}{f^2} = -\frac{\beta^2}{f^2},$$

e portanto,

$$\frac{f'}{f} = -\beta^2 \Theta. \quad (8.7)$$

Logo, a equação (8.6) pode ser escrita como

$$2\Theta \frac{\partial^2 b}{\partial \phi^2} + 2\beta^2 \Theta b + \Gamma'(\phi) = 0.$$

Considerando  $\Gamma'(\phi) = 0$ , temos  $2\Theta \frac{\partial^2 b}{\partial \phi^2} + 2\beta^2 \Theta b = 0$ .

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 b}{\partial \phi^2} + \beta^2 b = 0,$$

que é a equação de um oscilador harmônico. Logo,

$$b(\phi) = E_1 \text{sen}(\beta\phi) - E_2 \text{cos}(\beta\phi),$$

com  $E_1$  e  $E_2$  constantes arbitrárias. Acabamos de encontrar o  $b$ .

Derivando a expressão encontrada para  $b$  tem-se

$$b'(\phi) = \beta E_1 \text{cos}(\beta\phi) + \beta E_2 \text{sen}(\beta\phi).$$

Substituindo em (8.4), encontramos  $c$  sendo

$$c(r, \phi) = \frac{a_0}{f^2} - 2(\beta E_1 \cos(\beta\phi) + \beta E_2 \sin(\beta\phi)) \frac{V(r)}{\gamma} + \Gamma.$$

Observe que aqui, estamos considerando  $\Gamma$  como constante, já que anteriormente escolhemos  $\Gamma'(\phi) = 0$ .

Então, neste momento falta encontrarmos apenas  $\Phi$ . Voltando para as condições (III) e (IV):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 2amV'(r) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 2bm f(r)^2 V'(r)$$

Integrando em relação a  $r$  e  $\phi$  respectivamente,

$$\Phi(r, \phi) = 2ma_0\gamma\Theta(r) + g_1(\phi) \quad \Phi(r, \phi) = 2m\gamma \left( -E_1 \frac{\cos(\beta\phi)}{\beta} - E_2 \frac{\sin(\beta\phi)}{\beta} \right) + g_2(\phi).$$

Comparando as duas expressões para  $\Phi$ , concluí-se que

$$\Phi(r, \phi) = 2a_0mV(r) - \frac{2m\gamma E_1}{\beta} \cos(\beta\phi) - \frac{2m\gamma E_2}{\beta} \sin(\beta\phi) + k,$$

onde  $k$  é uma constante, vamos desconsiderá-las posteriormente para efeito de conta.

Acabamos então de encontrar as quatro funções que queríamos.

### 8.4.1 Determinando $I$

Utilizando as expressões que encontramos anteriormente para  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $\Phi$ , a saber

$$a(r, \phi) = a_0$$

$$b(r, \phi) = E_1 \text{sen}(\beta\phi) - E_2 \text{cos}(\beta\phi)$$

$$c(r, \phi) = \frac{a_0}{f^2} - 2(\beta E_1 \text{cos}(\beta\phi) + \beta E_2 \text{sen}(\beta\phi)) \frac{V(r)}{\gamma} + \Gamma$$

$$\Phi(r, \phi) = 2a_0 m V(r) - \frac{2m\gamma E_1}{\beta} \text{cos}(\beta\phi) - \frac{2m\gamma E_2}{\beta} \text{sen}(\beta\phi),$$

vamos substituir em (8.1), e assim obtemos  $I$ .

Então temos,

$$\begin{aligned} I &= a_0 p_r^2 + 2(E_1 \text{sen}(\beta\phi) - E_2 \text{cos}(\beta\phi)) p_r p_\phi \\ &+ \left[ \frac{a_0}{f^2} - 2(\beta E_1 \text{cos}(\beta\phi) + \beta E_2 \text{sen}(\beta\phi)) \frac{V(r)}{\gamma} + \Gamma \right] p_\phi^2 \\ &+ 2a_0 m V(r) - \frac{2m\gamma E_1}{\beta} \text{cos}(\beta\phi) - \frac{2m\gamma E_2}{\beta} \text{sen}(\beta\phi). \end{aligned}$$

Rearrajando a equação acima, temos

$$\begin{aligned} I &= a_0 p_r^2 + 2E_1 \left( \text{sen}(\beta\phi) p_r p_\phi - \beta \text{cos}(\beta\phi) \frac{V(r)}{\gamma} p_\phi^2 - \frac{m\gamma}{\beta} \text{cos}(\beta\phi) \right) \\ &- 2E_2 \left( \text{cos}(\beta\phi) p_r p_\phi + \beta \text{sen}(\beta\phi) \frac{V(r)}{\gamma} p_\phi^2 + \frac{m\gamma}{\beta} \text{sen}(\beta\phi) \right) \quad (8.8) \\ &+ \frac{a_0}{f(r)^2} p_\phi^2 + 2a_0 m V(r) + \Gamma p_\phi^2. \end{aligned}$$

Lembrando que  $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mf(r)^2} + V(r)$ , então

$$\begin{aligned} p_r^2 &= 2mH - \frac{p_\phi^2}{f(r)^2} - 2mV(r) \\ \Rightarrow a_0 p_r^2 &= 2ma_0H - \frac{a_0 p_\phi^2}{f(r)^2} - 2ma_0V(r) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Portanto, substituindo (8.9) em (8.8) tem-se

$$\begin{aligned} I &= 2E_1 \left( \text{sen}(\beta\phi)p_r p_\phi - \beta \cos(\beta\phi) \frac{V(r)}{\gamma} p_\phi^2 - \frac{m\gamma}{\beta} \cos(\beta\phi) \right) \\ &\quad - 2E_2 \left( \cos(\beta\phi)p_r p_\phi + \beta \text{sen}(\beta\phi) \frac{V(r)}{\gamma} p_\phi^2 + \frac{m\gamma}{\beta} \text{sen}(\beta\phi) \right) \\ &\quad + 2a_0 mH + \Gamma p_\phi^2 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Por construção,  $I$  é uma integral primeira, para quaisquer  $E_1$  e  $E_2$ .

## 8.5 Integrais Escondidas

Agora, vamos mostrar que a partir de  $I$  encontramos duas novas integrais de movimento que a princípio estão “escondidas”. De fato, como vimos em (8.10) temos

$$I = 2E_1 I_1 - 2E_2 I_2 + 2a_0 mH + \Gamma p_\phi^2,$$

onde,

$$I_1 = \text{sen}(\beta\phi)p_r p_\phi - \beta \cos(\beta\phi) \frac{V(r)}{\gamma} p_\phi^2 - \frac{m\gamma}{\beta} \cos(\beta\phi) \quad (8.11)$$

$$I_2 = \cos(\beta\phi)p_r p_\phi + \beta \text{sen}(\beta\phi) \frac{V(r)}{\gamma} p_\phi^2 + \frac{m\gamma}{\beta} \text{sen}(\beta\phi). \quad (8.12)$$

**Afirmção:**  $I_1$  e  $I_2$  são integrais de movimento.

*Demonstração.* Primeiro, observe que  $\{I, H\} = 0$ . Então,  $\{2E_1I_1 - 2E_2I_2 + 2a_0mH + \Gamma p_\phi^2, H\} = 0$ . Pela linearidade de  $\{, \}$ , temos  $\{2E_1I_1 - 2E_2I_2, H\} + \{2a_0mH + \Gamma p_\phi^2, H\} = 0$ .

Olhando para a segunda parcela do lado esquerdo da igualdade acima temos:

$$\{2a_0mH + \Gamma p_\phi^2, H\} = 2a_0m\{H, H\} + 2\Gamma\{p_\phi, H\}p_\phi = 0.$$

Portanto,  $\{2E_1I_1 - 2E_2I_2, H\} = 0$ . Logo,  $2E_1\{I_1, H\} - 2E_2\{I_2, H\} = 0$ . Mas como isso ocorre para quaisquer  $E_1$  e  $E_2$ , escolhendo  $E_2 = 0$  e  $E_1 = \frac{1}{2}$  temos  $\{I_1, H\} = 0$ . Assim,  $I_1$  é uma integral primeira. Por outro lado, escolhendo  $E_1 = 0$  e  $E_2 = \frac{-1}{2}$  temos  $\{I_2, H\} = 0$ . Então,  $I_2$  também é uma integral primeira.  $\square$

Essas duas integrais são generalizações das coordenadas do vetor de Laplace-Runge-Lenz estudado na seção 2.7.

Encontramos, portanto, quatro integrais primeiras,  $H$ ,  $p_\phi$ ,  $I_1$  e  $I_2$ . E, a partir de agora, vamos estudar independência entre essas integrais.

## 8.6 Independência entre as integrais

Como dissemos anteriormente, vamos estudar a independência entre  $I_1, I_2, H$  e  $p_\phi$ . Veremos que essas quatro integrais não são independentes entre si, de acordo com a definição 2.2.2. Porém a cada três dessas integrais, elas são independentes!

### 8.6.1 Considerando $I_1$ , $I_2$ , $H$ e $p_\phi$

Vamos provar duas proposições (igualdades) que nos ajudarão a mostrar a dependência linear entre as quatro integrais citadas.

**Proposição 8.6.1.** *Sendo  $I_1$  e  $I_2$  como em (8.11) e (8.12) respectivamente, nas condições da proposição 1, tem-se a igualdade*

$$I_1^2 + I_2^2 = p_r^2 p_\phi^2 + \beta^2 \Theta^2 p_\theta^4 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2} + 2m\gamma\Theta p_\phi^2. \quad (8.13)$$

*Demonstração.* A demonstração segue diretamente das definições em (8.11) e (8.12) elevá-las ao quadrado e somá-las.  $\square$

A outra igualdade que nos será de grande utilidade será

**Proposição 8.6.2.** *Nas mesmas condições da proposição acima, temos*

$$I_1^2 + I_2^2 = 2p_\phi^2 mH - \frac{Kp_\phi^4}{\beta^2} + \frac{\gamma^2 m^2}{\beta^2},$$

onde  $K = -\frac{f''}{f}$  é a curvatura da superfície.

*Demonstração.* Como observado em (8.7), temos

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = -\beta^2 \Theta(r),$$

logo,

$$\Theta(r) = -\frac{f'(r)}{\beta^2 f(r)}.$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado temos

$$\Theta^2 = \frac{f'^2}{\beta^4 f^2},$$

De  $f'^2 - f f'' = \beta^2$ , obtemos

$$\begin{aligned}\Theta^2 &= \frac{\beta^2 + f f''}{\beta^4 f^2} \\ \Rightarrow \Theta^2 &= \frac{1}{\beta^2 f^2} + \frac{f''}{\beta^4 f}.\end{aligned}$$

Usando que  $K = -\frac{f''}{f}$ , concluimos que  $\Theta^2 = \frac{1}{\beta^2 f^2} - \frac{K}{\beta^4}$ . Substituindo na equação (8.13) encontrada na proposição anterior, obtemos

$$\begin{aligned}I_1^2 + I_2^2 &= p_r^2 p_\phi^2 + \beta^2 \left( \frac{1}{\beta^2 f^2} - \frac{K}{\beta^4} \right) p_\phi^4 + \frac{m^2 \gamma^2}{\beta^2} + 2m\gamma\Theta p_\phi^2 \\ &= p_r^2 p_\phi^2 + \frac{p_\phi^4}{f^2} + 2m\gamma\Theta p_\phi^2 - \frac{K p_\phi^4}{\beta^2} + \frac{\gamma^2 m^2}{\beta^2} \\ &= 2mp_\phi^2 \left( \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mf^2} + \gamma\Theta \right) - \frac{K p_\phi^4}{\beta^2} + \frac{\gamma^2 m^2}{\beta^2} \\ &= 2mp_\phi^2 H - \frac{K p_\phi^4}{\beta^2} + \frac{\gamma^2 m^2}{\beta^2}\end{aligned}$$

□

Tendo feito isso, vamos atacar o nosso problema, mostrar a dependência linear das integrais. De fato, segue a proposição:

**Proposição 8.6.3.** *Sob as mesmas hipóteses da proposição 1 e tomando  $I_1$  e  $I_2$  como em (8.11) e (8.12) respectivamente, temos*

$$2I_1 \nabla I_1 + 2I_2 \nabla I_2 - 2mp_\phi \nabla H + 4 \left( \frac{K p_\phi^3}{\beta} - mp_\phi H \right) \nabla p_\phi = 0.$$

*E, portanto, como estamos considerando  $p_\phi \neq 0$  sempre, temos que os vetores  $\nabla I_1$ ,  $\nabla I_2$ ,  $\nabla H$  e  $\nabla p_\phi$  são pontualmente linear dependentes.*

*Demonstração.* Então, vamos considerar a igualdade encontrada na proposição 8.6.2,

$$I_1^2 + I_2^2 = 2p_\phi^2 H - \frac{Kp_\phi^4}{\beta^2} + \frac{\gamma^2 m^2}{\beta^2}$$

e vamos derivar em relação a  $r$ ,  $\phi$ ,  $p_r$  e  $p_\phi$ . Portanto,

- Fazendo para  $\frac{\partial}{\partial r}$ ,

$$\begin{aligned} 2I_1 \frac{\partial I_1}{\partial r} + 2I_2 \frac{\partial I_2}{\partial r} &= 2mp_\phi^2 \frac{\partial H}{\partial r} \\ \left( \frac{\partial p_\phi}{\partial r} = 0 \right) &\Rightarrow 2I_1 \frac{\partial I_1}{\partial r} + 2I_2 \frac{\partial I_2}{\partial r} - 2p_\phi \frac{\partial H}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$

- Para  $\frac{\partial}{\partial \phi}$ ,

$$2I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \phi} + 2I_2 \frac{\partial I_2}{\partial \phi} = 0 \quad \left( \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial p_\phi}{\partial \phi} = 0 \right) \quad (8.15)$$

- $\frac{\partial}{\partial p_r}$ ,

$$\begin{aligned} 2I_1 \frac{\partial I_1}{\partial p_r} + 2I_2 \frac{\partial I_2}{\partial p_r} &= 2p_\phi^2 \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ \left( \frac{\partial p_\phi}{\partial p_r} = 0 \right) &\Rightarrow 2I_1 \frac{\partial I_1}{\partial p_r} + 2I_2 \frac{\partial I_2}{\partial p_r} - 2p_\phi^2 \frac{\partial H}{\partial p_r} = 0 \end{aligned} \quad (8.16)$$

- e finalmente para  $\frac{\partial}{\partial p_\phi}$ ,

$$\begin{aligned} 2I_1 \frac{\partial I_1}{\partial p_\phi} + 2I_2 \frac{\partial I_2}{\partial p_\phi} &= 4mp_\phi H \frac{\partial p_\phi}{\partial p_\phi} + 2mp_\phi^2 \frac{\partial H}{\partial p_\phi} - \frac{4Kp_\phi^3}{\beta} \frac{\partial p_\phi}{\partial p_\phi} \\ \Rightarrow 2I_1 \frac{\partial I_1}{\partial p_\phi} + 2I_2 \frac{\partial I_2}{\partial p_\phi} - 2mp_\phi^2 \frac{\partial H}{\partial p_\phi} &+ 4 \left( \frac{Kp_\phi^3}{\beta} - mp_\phi H \right) \frac{\partial p_\phi}{\partial p_\phi} = 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Portanto, juntando (8.14), (8.15), (8.16) e (8.17) temos que é verdade o que queríamos,

$$2I_1 \nabla I_1 + 2I_2 \nabla I_2 - 2mp_\phi \nabla H + 4 \left( \frac{Kp_\phi^3}{\beta} - mp_\phi H \right) \nabla p_\phi = 0.$$

Como  $p_\phi$  sempre não nulo, pelo menos um dos coeficientes dessa combinação linear é não nulo,  $-2mp_\phi$ , e portanto,  $\nabla I_1$ ,  $\nabla I_2$ ,  $\nabla H$  e  $\nabla p_\phi$  são vetores linear dependentes.  $\square$

E assim provamos que as quatro integrais consideradas não são independentes.

# Referências

- [1] A. Alemi. Laplace-runge-lenz vector. <http://www.cds.caltech.edu/marsden/wiki/uploads/projects/geomech/Alemicds205final.pdf>, 2009.
- [2] V. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 60 of *Graduated Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Nova Iorque, 2 edition, 1989.
- [3] V. Arnold. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasicrystals*. Birkhause Verlag Basel, 1990.
- [4] C. Baird. Helmholtz decomposition of vector fields. <http://faculty.uml.edu/cbaird/95.6572012>.
- [5] S. Boatto. Curvature pertubartions and stability of a ring of vortices. *AIMS*, 10(2 e 3):349–375, Setembro e Outubro 2008.
- [6] S. Boatto, D.G. Dritschel, and R.G. Schaefer. The n-body, the n-vortices and the n-charges' dynamics on surfaces : A common view point. 2014. em preparação.
- [7] H. Cabral and F. Diacu, editors. *Classical and celestial mechanics: the Recife lectures*. Princeton University Press, 2002.

- [8] A.J. Chorin and J.E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluids Mechanics*. Number 4 in Texts in applied mathematics. Springer-Verlag, terceira edition, 2000.
- [9] D. Crowdy and S. Boatto. Point-vortex in dynamics. *Encyclopedia of Mathematical Physics*, pages 12–51, 2006. ed. por Jean-Pierre Francoise, Gregory Naber e Tsou S. Tsun.
- [10] F. Diacu, E. Pérez-Chavela, and M. Santoprete. The n-body problem in space of constant curvature. part i: Relative equilibria. *Nonlinear Science*, (22):227–266, August 2012.
- [11] M. do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Springer, 1994.
- [12] C. Doering and A. Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Coleção matemática universitária. IMPA, Rio de Janeiro, 4 edition, 2010.
- [13] L. Evans. *Partial Differential Equations*. Number 19 in Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 1998.
- [14] I.M. Gelfand and S.V. Fomin. *Calculus of Variations*. Dover Publications, INC., Nova Iorque, 2000.
- [15] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, third edition, 2001.
- [16] G. Hall, K. Meyer, and D. Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, volume 90 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2 edition, 2009.
- [17] P. Johnson. *Classical Mechanics with applications*. World Scientific, 2010.

- [18] Y. Kimura. Vortex motion on surfaces with constant curvature. *Proceedings of The Royal Society*, (455):245–259, 1999.
- [19] A. Lopes. *Introdução Mecânica Clássica*. EDUSP, São Paulo, 2006.
- [20] S. Mandelstam and W. Yourgrau. *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*. Pitman Publishing Corporation, 2<sup>ª</sup> edition, 1960.
- [21] R. Moeckel. Celestial mechanics - especially central configurations. <http://www.math.umn.edu/~rmoeckel/notes/CMNotes.pdf>.
- [22] F. Moulton. *An Introduction To Celestial Mechanics*. Dover Publications, Nova Iorque, 2<sup>ª</sup> edition, 1970.
- [23] H. Nussenzveig. *Curso de Física Básica - Eletromagnetismo*, volume 3. Editora Blucher, 1997.
- [24] M. Ru. Riemannian geometry, hodge theory on riemannian manifolds. <http://math.uh.edu/~minru/Riemann08/hodgetheory.pdf>.
- [25] M. Santoprete. Gravitational and harmonic oscillator potentials on surfaces of revolution. *Journal of Mathematical Physics*, 49:042903, 2008.
- [26] M. Santoprete. Block regularization of the kepler problem on surfaces of revolution with positive constant curvature. *Journal of Differential Equations*, 247(4):1043 – 1063, 2009.
- [27] A.V. Shchepetilov. *Calculus and Mechanics on two points homogenous Riemannian Spaces*. Number 707. Springer, 2006.
- [28] F. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Number 94 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2 edition, 1971.

- [29] J. Wheeler. Bertrand's theorem. physics.usu.edu/Wheeler/ClassicalMechanics/ CMBertrandsTheorem.pdf.